الوحدة
1

المُتبايناتُ الخطيَّة
Linear Inequalities

ما أهمية هذه الوحدة؟

تُستعمَلُ المُتبايناتُ فِي الكثيرِ مِنَ المواقفِ الحياتيَّةِ والعلميَّةِ للتعبيرِ عنْ مقاديرَ ذاتِ قِيَمٍ غيرِ مُحدَّدةٍ، مثلِ درجةِ الحرارةِ الَّتي يمكنُ أنْ تعيشَ فيها أسماكُ الزينةِ، كما تُستعمَلُ للتعبيرِ عَنِ التكلفةِ الممكنةِ لإنتاجِ سلعةٍ ما أو الرِّبحِ الذي يمكنُ تحقيقُهُ عندَ بيعِها.

تعلَّمْتُ سابقًا:

- ✓ حلُّ مُعادلاتٍ خطيَّةٍ بِمُتَغَيِّرٍ واحدٍ.
- ✓ حلُّ مُتباينةٍ خطيَّةٍ بأكثرَ مِنْ خُطوةٍ، وتمثيلُ حلِّها على خطِّ الأعدادِ.
- ✓ تمثيلُ المُعادلةِ الخطيَّةِ فِي المُستوَى الإحداثيِّ.

سأتعلَّم في هذه الوحدة:

- ◂ التعبيرَ عنِ المُتبايناتِ باستعمالِ المجموعاتِ والفتراتِ.
- ◂ حلَّ مُتبايناتٍ مُرَكَّبةٍ وتمثيلَ مجموعةِ حلِّها بيانيًا.
- ◂ حلَّ مُعادلاتِ القيمةِ المُطلقةِ ومُتبايناتِها.
- ◂ تمثيلَ مُتباينةٍ خطيَّةٍ بمتغيِّرَيْنِ بيانيًّا.

أستعمل تدريبات (أستعد لدراسة الوحدة) في الصفحات (6 و 7 و 8) من كتاب التمارين؛ لمراجعة هذه الموضوعات قبل البدء بدراسة الوحدة.

الدرس

1

المجموعاتُ والفتراتُ

Sets and Intervals

فكرة الدرس

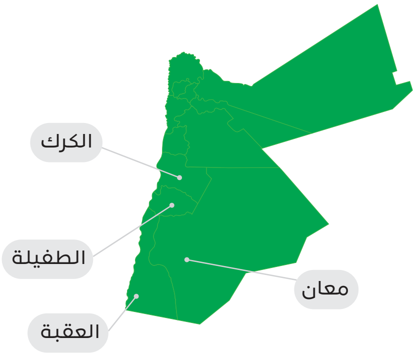
- كتابةُ المجموعاتِ باستعمالِ طريقتَي سردِ العناصرِ والصِّفةِ المُميِّزةِ للمجموعةِ.
- التعبيرُ عَنِ المُتبايناتِ باستعمالِ الفتراتِ.

المصطلحات

مجموعةٌ، عنصرٌ، سردُ العناصرِ، الصِّفةُ المُمَيِّزَةُ للمجموعةِ، المجموعةُ الخاليةُ، المجموعة المفردةُ، المجموعةُ المنتهيةُ، المجموعةُ غيرُ المنتهيةِ، رمزُ الفترةِ، المالانهايةَ، الفترةُ غيرُ المحُدودةِ.

مسألة اليوم

يُبَيِّنُ الشكلُ المُجاوِرُ مواقعَ بعضِ المُحافظاتِ علَى خريطةِ المملكةِ الأردنيَّةِ الهاشميَّةِ. مَا الصِّفةُ الَّتي تشتركُ فيها المُحافظاتُ الَّتي تظهرُ علَى الخريطةِ؟



المجموعةُ وطرائقُ التعبيرِ عنها

المجموعةُ (set) تجمعُ الأشياءَ المُتمايزةَ الَّتي تحملُ صفةً مشتركةً، وتسمّى كلٌّ مِنَ الأشياءِ الَّتي تكوِّنُ المجموعةَ **عُنصرًا** (element)، ويمكنُ أنْ تُعبِّرَ المجموعةُ عنْ أحرفٍ أو أعدادٍ أو كلماتٍ. فمثلًا، يُعَدُّ يومُ الأحدِ عُنصرًا مِنْ عناصرِ مجموعةِ أيامِ الأُسبوعِ.

تُستعمَلُ الأحرفُ الكبيرةُ لتسميةِ المجموعاتِ، مثل: $A, B, C, X, Y, \ldots$، وتُستعمَلُ الأحرفُ الصغيرةُ لتسميةِ عناصرِ المجموعةِ، مثل: $a, b, c, x, y, \ldots$.

إذا كانَ a عنصرًا مِنْ عناصرِ المجموعةِ A، فإنَّنا نقولُ إنَّ a ينتمي إلَى المجموعةِ A، ونكتبُ ذلكَ علَى الصورةِ: $a\in A$؛ حيثُ يُرمزُ إلَى كلمةِ (ينتمي إلى) بالرَّمزِ ($\in$). وَمِنْ ناحيةٍ أُخرى إذا كانّ b لا ينتمي إلَى المجموعةِ A، فإنَّنا نكتبُ ذلكَ على صورة: $b\notin A$؛ حيثُ يُرمزُ إلى كلمةِ (لا ينتمي) بالرَّمزِ ($\notin$).

يمكنُ التعبيرُ عَنِ المجموعةِ بطريقةِ **سـردِ العناصـر** (roster form)، بحيثُ تُكتَبُ عناصرُ المجموعةِ بينَ قوسـينِ مُجعَّدَيْنِ { }، وَيُفْصَلُ بينَ كلِّ عنصـرٍ وآخَرَ بفاصلةٍ. فمثلًا، نُعبِّرُ عَنِ المجموعةِ A، الَّتي عناصرُها الأعدادُ الكُلِّيَّةُ الأقلُّ مِنْ أوْ تُساوي 3، بطريقةِ سردِ العناصرِ على صورةِ: $A = \{0, 1, 2, 3\}$.

يمكـنُ أيضـا التعبيـرُ عَـنِ المجموعـةِ باسـتعمالِ **الصِّفـةِ المُمَيِّـزَةِ للمجموعـةِ** (set–builder notation). فمثلًا، يمكنُ التعبيرُ عَنِ المجموعةِ $A =\{0, 1, 2, 3\}$ بطريقةِ الصفة المميزة $A =\{x \mid x \leq 3, x \in W\}$، وَتُقـرَأُ: مجموعةَ الأعدادِ x؛ حيثُ ينتمي x إلى مجموعةِ الأعدادِ الكُلِّيَّةِ الَّتي تقلُّ عَنْ أوْ تُساوي 3.

رُموزٌ رياضيَّةٌ

يُرمَـزُ إلـى مجموعـةِ الأعدادِ الكُلِّيَّةِ بالرَّمزِ W، وَهِيَ: $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

مثال 1

أُعبِّرُ عَنْ كلٍّ مِنَ المجموعاتِ الآتيةِ مستعملًا طريقةَ سردِ العناصرِ، وَطريقةَ الصِّفةِ المُمَيِّزَةِ:

1 **مجموعةُ الأعدادِ الكُليَّةِ الَّتي تقلُّ عَنْ 12**

طريقةُ سردِ العناصرِ: $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$

طريقةُ الصِّفةِ المُميِّزَةِ: $E =\{x \mid x < 12, x \in W\}$

2 **مجموعةُ مُضاعفاتِ العددِ 5 الَّتي تقلُّ عَنْ 25**

طريقةُ سردِ العناصرِ: $C = \{5, 10, 15, 20\}$

طريقةُ الصِّفةِ المُميِّزَةِ: $C = \{x \mid x = 5k, k \in W, x < 25\}$

أتذكَّرُ

مُضاعفُ العـددِ هُوَ ناتجُ ضربِهِ في أيِّ عددٍ كُلِّيٍّ ما عدا الصِّفرِ.

3 **مجموعةُ حلِّ المُعادلةِ $2x - 8 = 0$**

طريقةُ سردِ العناصرِ: $S = \{4\}$

طريقةُ الصِّفةِ المُميِّزَةِ: $S = \{x \mid 2x - 8 = 0\}$

أتحقَّق من فهمي

أُعَبِّرُ عنْ كلٍّ مِنَ المجموعاتِ الآتيةِ مُستعملًا طريقةَ سردِ العناصرِ، وطريقةَ الصِّفةِ المُميِّزَةِ:

a) مجموعةُ الأعدادِ الكُليَّةِ الَّتي تقلُّ عَنْ 8

b) مجموعةُ مُضاعفاتِ العددِ 3 الَّتي تقلُّ عَنْ 18

c) مجموعةُ حلِّ المُعادلةِ $3x - 2 = 0$

أنواعُ المجموعاتِ

يوجدُ عِدَّةُ أنواعٍ للمجموعاتِ، منها:

- **المجموعةُ الخاليةُ** (empty set): هِيَ المجموعةُ الَّتي لا تحتوي على أيِّ عنصرٍ، وَيُرمَزُ لها بالرَّمزِ $\varnothing$ أوِ الرَّمزِ { }، وَمِنْ أمثلتِها مجموعةُ الأعدادِ الفرديَّةِ الَّتي تقبَلُ القِسمَةَ على 2، فَمِنَ المعلومِ أنَّهُ لا يوجدُ عددٌ فرديٌّ يقبَلُ القِسمَةَ على 2.
- **المجموعةُ المفردةُ** (singular set): هِيَ المجموعةُ الَّتي تحتوي على عنصرٍ واحدٍ فقط، وَمِنْ أمثلتِها مجموعةُ حلِّ المُعادلةِ $x + 8 = 0$؛ فَهِيَ تحتوي على عنصرٍ واحدٍ فقط، هُوَ -8
- **المجموعةُ المُنتهيةُ** (finite set): هِيَ المجموعةُ الَّتي يمكنُ عَدُّ عناصِرِها، مثلُ $H = \{4, 8, 12, 16\}$
- **المجموعةُ غيرُ المُنتهيةِ** (infinite set): هِيَ المجموعةُ الَّتي لا يمكنُ عَدُّ عناصِرِها، مثلُ مجموعةِ الأعدادِ الكُليَّةِ الَّتي تزيدُ على 7، وَهِيَ: $R = \{8, 9, 10, \ldots\}$

أتعلَّم

تُستعمَلُ النِّقاطُ الثلاثُ "…" للدَّلالةِ على أنَّ المجموعةَ غيرُ منتهيةٍ.

مثال 2

أكتبُ كلَّ مجموعةٍ ممّا يأتي بطريقةِ سردِ العناصرِ، ثُمَّ أُحَدِّدُ ما إذا كانتْ خاليةً، أمْ مفردةً، أمْ منتهيةً، أمْ غيرَ منتهيةٍ:

1) $P = \{x \mid x > -3, x \in Z\}$

تمثِّلُ P مجموعةَ الأعدادِ الصَّحيحةِ الَّتي تزيدُ على -3، وَتُكتَبُ بطريقةِ سردِ العناصرِ، كما يأتي:

$$P = \{-3, -2, -1, \ldots\}$$

إذنْ، المجموعةُ P غيرُ منتهيةٍ.

رموزٌ رياضيَّةٌ

يُرمَزُ لمجموعةِ الأعدادِ الصَّحيحةِ بالرَّمزِ Z، وَهِيَ: $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

2 $O = \{ x \mid x = 2k + 1, k \in Z \}$

تمثِّلُ O مجموعةَ الأعدادِ الفرديَّةِ، وَتُكتَبُ بطريقةِ سردِ العناصِرِ، كما يأتي:

$$O = \{\ldots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots\}$$

إذنْ، المجموعةُ O غيرُ منتهيةٍ.

3 $D = \{ x \mid 3x - 12 = 0\}$

تمثِّلُ D مجموعةَ حلِّ المُعادلةِ $3x - 12 = 0$، وَتُكتَبُ بطريقةِ سردِ العناصِرِ، كما يأتي:

$$D = \{4\}$$

إذنْ، المجموعةُ D مفردةٌ.

4 $D = \{ x \mid x = 3k, k \in W, x < 2\}$

تمثِّلُ D مجموعةَ مُضاعفاتِ العددِ 3، الَّتي تقلُّ عَنْ 2. وَبِما أنَّهُ لا توجدُ أعدادٌ تحقِّقُ هذهِ القاعدةَ، فالمجموعةُ D خاليةٌ.

5 $T = \{ x \mid x = \frac{1}{k}, k \in W, k < 4\}$

تمثِّلُ T مجموعةَ مقلوبِ الأعدادِ الكُليَّةِ الَّتي تقلُّ عَنْ 4، وَتُكتَبُ بطريقةِ سـردِ العناصِرِ، كما يأتي:

$$T = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$$

إذنْ، المجموعةُ T منتهيةٌ.

أتحقَّقُ من فهمي

a) $P = \{ x \mid x > 10, x \in W\}$

b) $O = \{ x \mid x = 2k, k \in Z\}$

c) $D = \{ x \mid 0.5x + 10 = 0\}$

d) $D = \{ x \mid x < 0, x \in W\}$

e) $T = \{ x \mid x = k^2, k \in W, k < 5\}$

أتعلَّمُ

تُستعمَلُ العبارةُ $2k + 1$ للدَّلالـةِ علَـى الأعدادِ الفرديَّةِ. فمثـلًا، العددُ 7 عددٌ فرديٌّ، ويمكنُ كتابتُهُ على صورة:

$$7 = 2(3) + 1$$

المُتبايناتُ والصِّفةُ المُمَيِّزَةُ للمجموعةِ

تعلَّمْتُ سابقًا حلَّ المُتباينةِ، وكانَ مِنَ الصَّعبِ كتابةُ جميعِ القِيَمِ الَّتي تحقِّقُ المُتباينةَ؛ لِذا لجأتُ إلى تمثيلِ تلكَ القِيَمِ على خطِّ الأعدادِ، ولكنَّ استعمالَ الصِّفةِ المُمَيِّزَةِ للمجموعةِ يوفِّرُ طريقةً مُختصرةً للتعبيرِ عَنْ مجموعةِ حلِّ المُتباينةِ.

مثال 3

أكتبُ مجموعةَ حلِّ كلِّ مُتباينةٍ ممّا يأتي باستعمالِ الصِّفةِ المُمَيِّزَةِ:

1 $5x - 8 > 12$

المُتباينةُ الأصليَّةُ	$5x - 8 > 12$
بِجَمعِ 8 لِطرفَي المُتباينةِ	$5x - 8 + 8 > 12 + 8$
بِقسمةِ طرفَي المُتباينةِ على 5	$\frac{5x}{5} > \frac{20}{5}$
بالتبسيطِ	$x > 4$

إذنْ، مجموعةُ الحلِّ هِيَ $\{x \mid x > 4\}$

2 $3x - 4 \geq 6x + 11$

المُتباينةُ الأصليَّةُ	$3x - 4 \geq 6x + 11$
بِجَمعِ 4 لِطرفَي المُتباينةِ	$3x - 4 + 4 \geq 6x + 11 + 4$
بِطرحِ $6x$ مِنْ طرفَي المُتباينةِ	$3x - 6x \geq 6x - 6x + 15$
بِقسمةِ طرفَي المُتباينةِ على -3	$\frac{-3x}{-3} \leq \frac{15}{-3}$
بالتبسيطِ	$x \leq -5$

إذنْ، مجموعةُ الحلِّ هِيَ $\{x \mid x \leq -5\}$

أتحقَّقُ من فهمي

أكتبُ مجموعةَ حلِّ كلِّ مُتباينةٍ ممّا يأتي باستعمالِ الصِّفةِ المُمَيِّزَةِ:

a) $2x + 10 \leq 14$

b) $3x + 3 < 4x - 5$

أتعلَّمُ

تدلُّ المجموعةُ $\{x \mid x > 4\}$ على أنَّ مجموعةَ الحلِّ هِيَ جميعُ الأعدادِ الحقيقيَّةِ الأكبرِ مِنْ 4.

أتذكَّرُ

إذا قُسِمَ (أوْ ضُرِبَ) كلٌّ مِنْ طرَفَي مُتباينةٍ صحيحةٍ على عددٍ سالبٍ فيجبُ تغييرُ اتِّجاهِ رمزِ المُتباينةِ لِجعلِ المُتباينةِ الناتجةِ صحيحةً أيضًا.

المُتبايناتُ والفتراتُ

تعلَّمتُ فِي المثالِ السابقِ كتابةَ مجموعةِ حلِّ المُتباينةِ باستعمالِ الصِّفةِ المُمَيِّزةِ للمجموعةِ، ويمكنُ أيضًا استعمالُ **رمزِ الفترةِ** (interval notation) لكتابةِ مجموعةِ حلِّ المُتباينةِ.

يُستعمَلُ رمزي **المالانهايةِ** (infinity) في أدناهُ للدَّلالةِ على أنَّ **الفترةَ غيرُ محُدودةٍ** (unbounded interval) فِي الاتِّجاهِ الموجبِ أوِ السالبِ.

∞

يُقرَأُ الرَّمزُ: المالانهاية الموجبة، وَيُستعمَلُ للدَّلالةِ على أنَّ الفترةَ غيرُ محُدودةٍ فِي الاتِّجاهِ الموجبِ.

$-\infty$

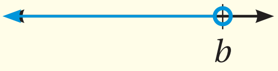
يُقرَأُ الرَّمزُ: المالانهاية السالبة، وَيُستعمَلُ للدَّلالةِ على أنَّ الفترةَ غيرُ محُدودةٍ فِي الاتِّجاهِ السالبِ.

يُستعمَلُ الرَّمزانِ ” [” أو ”] ” عندما يكونُ رمزُ المُتباينةِ $\geq$ أوْ $\leq$ للدَّلالةِ علَى انتماءِ طرفِ الفترةِ إليها، وَيُستعمَلُ الرَّمزانِ (أو) عندما يكونُ رمزُ المُتباينةِ $>$ أوْ $<$ للدَّلالةِ على عدمِ انتماءِ طرفِ الفترةِ إليها.

وفي ما يأتي تلخيصٌ للفتراتِ غيرِ المحُدودةِ وكيفيَّةِ تمثيلِها على خطِّ الأعدادِ:

مفهومٌ أساسيٌّ **الفترات غير المحُدودة**

إذا كانَ a وَ b عددانِ حقيقيّانِ فيمكنُ التعبيرُ عَنْ كلٍّ مِنَ المُتبايناتِ الآتيةِ باستعمالِ فترةٍ غيرِ محُدودةٍ:

المُتباينةُ	رَمزُ الفترةِ	التمثيلُ على خطِّ الأعدادِ
$x \geq a$	$[a, \infty)$	
$x > a$	(a, ∞)	
$x \leq b$	$(-\infty, b]$	
$x < b$	$(-\infty, b)$	
	$(-\infty, \infty)$	

أتعلَّمُ

يُستعمَلُ الرَّمزانِ (أو) دائمًا معَ رمزي المالانهايةِ لأَنَّهُما لا تتضمَّنانِ نقطةَ نهايةٍ.

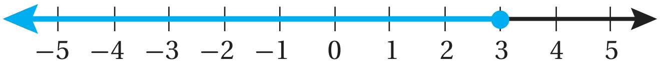
مثال 4

أكتبُ كلَّ مُتباينةٍ ممّا يأتي باستعمالِ رمزِ الفترةِ، ثمَّ أُمَثِّلُها على خطِّ الأعدادِ:

1 $x \leq 3$

رمزُ الفترةِ: $(-\infty, 3]$

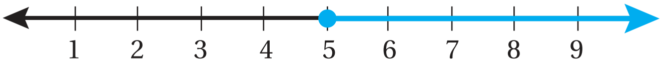
التمثيلُ على خطِّ الأعدادِ:



2 $x \geq 5$

رمزُ الفترةِ: $[5, \infty)$

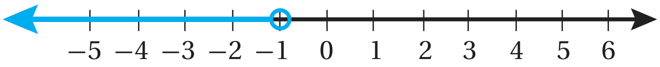
التمثيلُ على خطِّ الأعدادِ:



3 $x < -1$

رمزُ الفترةِ: $(-\infty, 1)$

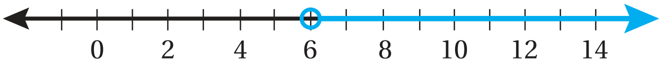
التمثيلُ على خطِّ الأعدادِ:



4 $x > 6$

رمزُ الفترةِ: $(6, \infty)$

التمثيلُ على خطِّ الأعدادِ:



أتذكَّرُ

تُستعمَلُ الدائرةُ المفتوحةُ إذا كانَ رمـزُ المُتباينةِ < أوْ >، أمّا الدائرةُ المغلقةُ فَتُسـتعمَلُ إذا كانَ رمـزُ المُتباينةِ ≤ أوْ ≥.

أتحقَّق من فهمي

أكتبُ كلَّ مُتباينةٍ ممّا يأتي باستعمالِ رمزِ الفترةِ، ثمَّ أُمَثِّلُها على خطِّ الأعدادِ:

a) $x \leq -2$

b) $x \geq 10$

c) $x < 8$

d) $x > -7$

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أُعَبِّرُ عَنْ كلٍّ مِنَ المجموعاتِ الآتيةِ مستعملًا طريقةَ سردِ العناصِرِ، وَطريقةَ الصِّفةِ المُمَيِّزَةِ:

1. مجموعةُ الأعدادِ الكُليَّةِ الَّتي تزيدُ على أوْ تُساوي 20
2. مجموعةُ مُضاعفاتِ العددِ 4 الَّتي تقلُّ عَنْ 50
3. مجموعةُ الأعدادِ الفرديَّةِ الَّتي تزيدُ على أوْ تُساوي 11
4. مجموعةُ الأعدادِ الصَّحيحةِ الَّتي تقلُّ عَنْ -4
5. مجموعةُ الأعدادِ الزوجيَّةِ الَّتي تقلُّ عَنْ أوْ تُساوي 100
6. مجموعةُ حلِّ المُعادلةِ $5x - 30 = 0$
7. مجموعةُ مُضاعفاتِ العددِ 5 الَّتي تقلُّ عَنْ 4
8. مجموعةُ الأعدادِ الكُليَّةِ الَّتي تقلُّ عَنْ 8

أكتبُ كلَّ مجموعةٍ ممّا يأتي بطريقةِ سردِ العناصِرِ، ثمَّ أُحَدِّدُ ما إذا كانتْ خاليةً، أمْ مفردةً، أمْ منتهيةً، أمْ غيرَ منتهيةٍ:

9. $A = \{x \mid x \in W, x \leq 1\}$
10. $B = \{x \mid 3x + 1 = 0\}$
11. $C = \{x \mid x < 2, x \in Z\}$
12. $D = \{x \mid x^2 = x, x \in Z\}$
13. $E = \{x \mid x = 6k, k \in W, x < 5\}$
14. $T = \{x \mid x = k^3 , k \in W, x < 80\}$

أكتبُ مجموعةَ حلِّ كلِّ مُتباينةٍ ممّا يأتي باستعمالِ الصِّفةِ المُمَيِّزَةِ:

⑮ $7 + 6x < 19$

⑯ $2(y + 2) - 3y \geq -1$

⑰ $18x - 5 \leq 3(6x - 2)$

أكتبُ كلَّ مُتباينةٍ ممّا يأتي باستعمالِ رمزِ الفترةِ، ثمَّ أُمَثِّلُها على خطِّ الأعدادِ:

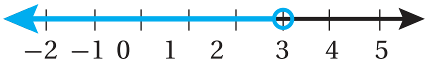
⑱ $x < -7$

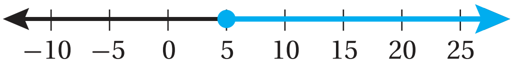
⑲ $x > 12$

⑳ $x \leq 1$

㉑ $x \geq -20$

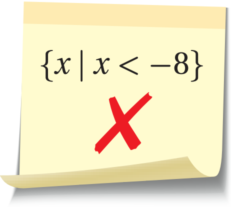
أكتبُ المُتباينةَ المُمَثَّلَةَ على خطِّ الأعدادِ في كلٍّ ممّا يأتي، ثمَّ أُعَبِّرُ عنها باستعمالِ رمزِ الفترةِ:

㉒


㉓


مهارات التفكير العليا

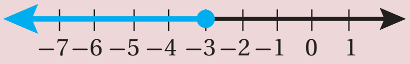
㉔ **أكتشفُ الخطأَ:** أعادَ أحمدُ كتابةَ الفترةِ $(-\infty, -8]$ باستعمالِ الصِّفةِ المُمَيِّزَةِ، كما هوَ مُبَيَّنٌ جانبًا.


$\{x \mid x < -8\}$

أُبَيِّنُ الخطأَ الَّذي وقعَ فيهِ أحمدُ، وأُصَحِّحُهُ.

㉕ **تَحَدٍّ:** أكتبُ المجموعةَ $D = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{4}{17}, \frac{5}{26}, \frac{6}{37}, \frac{7}{50}\right\}$ باستعمالِ الصِّفةِ المُمَيِّزَةِ.

㉖ **أكتشفُ المُختلِفَ:** أيُّ الآتيةِ مختلفٌ؟ أبرّرُ إجابتي:



$x < -3$

$\{-6, -5, -4, ...\}$

$\{x \mid x < -3\}$

الدرس 2

حلُّ المُتبايناتِ المُرَكَّبَةِ
Solving Compound Inequalities

فكرة الدرس حلُّ مُتبايناتٍ مُرَكَّبَةٍ تحتوي على أداةِ الرَّبطِ (و) أوْ (أو)، وتمثيلُ مجموعةِ حَلِّها بيانيًّا.

المصطلحات مُتباينةٌ بسيطةٌ، مُتباينةٌ مُرَكَّبَةٌ، تقاطعٌ، اتِّحادٌ، فترةٌ محدودةٌ.

مسألة اليوم تُعَدُّ سمكةُ النيون تيترا مِنْ أكثرِ أسماكِ الزينةِ شُهرَةً، وَتَعيشُ في مياهٍ عذبةٍ درجةُ حرارتِها بينَ 20°C وَ 26°C. أكتبُ مُتباينةً تمثلِ درجاتِ الحرارةِ الملائمةِ للسمكةِ.

المُتباينةُ المُرَكَّبَةُ

تُسَمّى المُتبايناتُ الَّتي تعلَّمتُها سابقًا **مُتبايناتٍ بسيطةً** (simple inequalities)؛ لأنَّها تحتوي على رمزِ مُتباينةٍ واحدٍ.

المُتباينةُ المُرَكَّبَةُ (compound inequality): هِيَ مُتباينةٌ ناتجةٌ عَنْ ربطِ مُتباينتينِ باستعمالِ أداةِ الرَّبطِ (و) أوْ مرادفِها باللُّغةِ الإنجليزيَّةِ (and) أوْ باستعمالِ أداةِ الرَّبطِ (أو) أوْ مرادفِها باللُّغةِ الإنجليزيَّةِ (or).

مُتبايناتٌ مُرَكَّبَةٌ	مُتباينةٌ بسيطةٌ
$x \geq 1$ and $x \leq 4$	$x \geq 5$
$x < 0$ or $x \geq 3$	

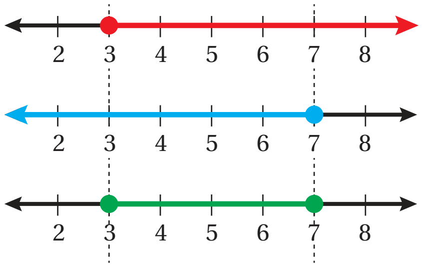
التمثيلُ البيانيُّ للمُتباينةِ المُرَكَّبَةِ الَّتي تحتوي على أداةِ الرَّبطِ (و) هُوَ **تقاطعُ** (intersection) التمثيلَيْنِ البيانيَّيْنِ للمُتباينتَيْنِ المُكَوِّنتَيْنِ للمُتباينةِ المُرَكَّبَةِ.

$x \geq 3$

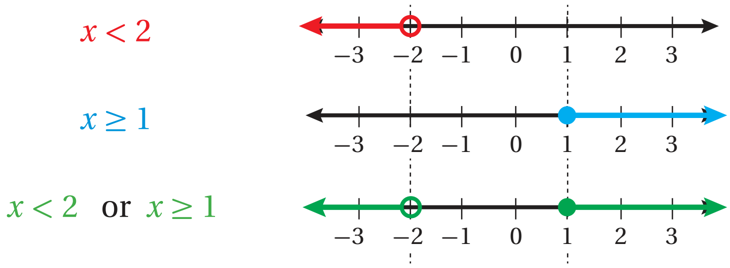
$x \leq 7$

$x \geq 3$ and $x \leq 7$

$3 \leq x \leq 7$



التمثيلُ البيانيُّ للمُتباينةِ المُركَّبَةِ الَّتي تحتوي على أداةِ الرَّبطِ (أو) هُوَ **اتحادُ** (union) التمثيلَيْنِ البيانِيَّيْنِ للمُتباينتَيْنِ المُكوِّنتَيْنِ للمُتباينةِ المُركَّبَةِ.



مثال 1

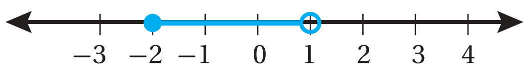
أكتبُ مُتباينةً تمثلِ كلِّ جملةٍ ممّا يأتي، ثمَّ أُمَثِّلُها على خطِّ الأعدادِ:

1 **عددٌ أكبرُ مِنْ أوْ يُساوي 2– وأقلُّ مِنْ 1**

أختارُ مُتَغيِّرًا: لِيكُنْ x مُمَثِّلًا للعددِ

أكتبُ المُتباينةَ: $-2 \le x < 1$

أُمَثِّلُ على خطِّ الأعدادِ:

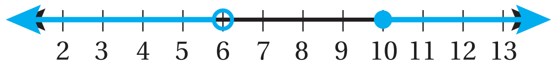


2 **عددٌ أقلُّ مِنْ 6 أوْ لا يقلُّ عَنْ 10**

أختارُ مُتَغيِّرًا: لِيكُنْ y مُمَثِّلًا للعددِ

أكتبُ المُتباينةَ: $y < 6$ or $y \ge 10$

أُمَثِّلُ على خطِّ الأعدادِ:



أتحقَّقُ من فهمي

أكتبُ مُتباينةً تمثِّلُ كلَّ جملةٍ ممّا يأتي، ثمَّ أُمَثِّلُها على خطِّ الأعدادِ:

a) عددٌ أكبرُ مِنْ 3– وأقلُّ مِنْ 7

b) عددٌ علَى الأكثرِ 0 أوْ علَى الأقلِّ 2

أتذكَّرُ

تعني عبارةُ علَى الأكثرِ ≤، أمّا عبارةُ علَى الأقلِّ فتعني ≥

المُتبايناتُ المُرَكَّبَةُ والفتراتُ

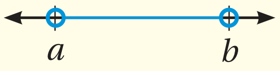
تعلَّمتُ في الدرسِ السابقِ كيفيَّةَ التعبيرِ عَنِ المُتباينةِ غيرِ المُرَكَّبَةِ باستعمالِ رمزِ الفترةِ، ويمكنُ أيضًا التعبيرُ عَنِ المُتباينةِ المُرَكَّبَةِ باستعمالِ رمزِ الفترةِ.

يمكنُ التعبيرُ عَنِ المُتباينةِ المُرَكَّبَةِ الَّتي تحتوي على أداةِ الرَّبطِ (و) باستعمالِ **فترةٍ مَحْدودةٍ** (bounded interval)، وَهِيَ فترةٌ لا يمتدُّ أيٌّ مِنْ طَرَفَيْها إلَى المالانهاية، وفي ما يأتي أشكالُ الفتراتِ المَحْدودةِ المختلفةِ الَّتي تُعبِّرُ عَنِ المُتبايناتِ المُرَكَّبَةِ:

مفهومٌ أساسيٌّ

الفتراتُ المَحْدودةُ

إذا كانَ a وَb عددانِ حقيقيّانِ؛ حيثُ $a < b$، فيمكنُ التعبيرُ عَنْ كلٍّ مِنَ المُتبايناتِ المُرَكَّبَةِ الآتيةِ باستعمالِ فترةٍ مَحْدودةٍ:

المُتباينةُ	رَمزُ الفترةِ	التمثيلُ على خطِّ الأعدادِ
$a \leq x \leq b$	$[a, b]$	
$a < x < b$	(a, b)	
$a \leq x < b$	$[a, b)$	
$a < x \leq b$	$(a, b]$	

أمّا إذا احتوتِ المُتباينةُ المُرَكَّبَةُ على أداةِ الرَّبطِ (أو)، فيمكنُ التعبيرُ عَنْ كلٍّ مِنَ المُتباينتَيْنِ المُكَوِّنتَيْنِ لها باستعمالِ فترةٍ غيرِ مَحْدودةٍ، ثمَّ الرَّبطُ بينَ الفترتَيْنِ باستعمالِ رمزِ الاتحادِ $\cup$.

مثال 2

أكتبُ كلَّ مُتباينةٍ مُرَكَّبَةٍ ممّا يأتي باستعمالِ رمزِ الفترةِ، ثمَّ أُمَثِّلُها على خطِّ الأعدادِ:

1 $-5 \leq x \leq 5$

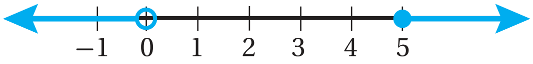
رمزُ الفترةِ: $[-5, 5]$

التمثيلُ على خطِّ الأعدادِ:

2 $x < 0$ or $x \geq 5$

رمزُ الفترةِ: $(-\infty, 0) \cup [5, \infty)$

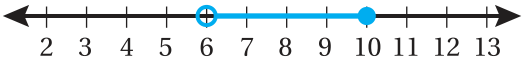
التمثيلُ على خطِّ الأعدادِ:



3 $6 < x \leq 10$

رمزُ الفترةِ: $(6, 10]$

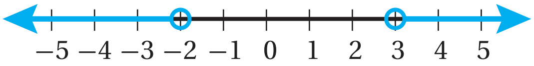
التمثيلُ على خطِّ الأعدادِ:



4 $x < -2$ or $x > 3$

رمزُ الفترةِ: $(-\infty, -2) \cup (3, \infty)$

التمثيلُ على خطِّ الأعدادِ:



أتحقَّق من فهمي

أكتبُ كلَّ مُتباينةٍ مُركَّبةٍ ممّا يأتي باستعمالِ رمزِ الفترةِ، ثمَّ أُمَثِّلُها على خطِّ الأعدادِ:

a) $-10 < x \leq 10$

b) $x > 1$ or $x < -4$

c) $7 \leq x < 12$

d) $x \leq -8$ or $x \geq 8$

حلُّ المُتبايناتِ المُرَكَّبَةِ

تعلَّمتُ سابقًا حلَّ المُتبايناتِ غيرِ المُرَكَّبَةِ باستعمالِ خصائصِ جمعِ المُتبايناتِ وطرحِها وضربِها وَقِسمَتِها، ويمكنُ تطبيقُ الخصائصِ ذاتِها لحلِّ المُتبايناتِ المُرَكَّبَةِ الَّتي تحتوي على أداةِ الرَّبطِ (و).

أتعلَّمُ

مجموعةُ حلِّ المُتباينةِ المُرَكَّبَةِ الَّتي تحتوي على أداةِ الرَّبطِ (و)، هِيَ مجموعةُ الأعدادِ الَّتي تحقِّقُ المُتباينتَيْنِ المُكَوِّنتَيْنِ للمُتباينةِ المُرَكَّبَةِ معًا. فمثلًا، $1 < x \le 4$ هِيَ مجموعةُ الأعدادِ الَّتي تحقِّقُ المُتباينتَيْنِ $x > 1$ و $x \le 4$ معًا.

مثال 3

أَجِدُ مجموعةَ حلِّ كلِّ مُتباينةٍ ممّا يأتي، ثمَّ أُمَثِّلُها بيانيًّا:

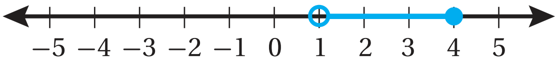
1 $-4 < x - 5 \le -1$

المُتباينةُ المُعطاة $-4 < x - 5 \le -1$

بإضافةِ 5 إلى كلِّ طَرَفٍ $-4 + 5 < x - 5 + 5 \le -1 + 5$

بالتبسيطِ $1 < x \le 4$

إذنْ، مجموعةُ الحلِّ $\{x \mid 1 < x \le 4\}$ أوْ $(1, 4]$، وتمثيلُها بيانيًّا علَى النَّحوِ الآتي:



2 $-3 < -2x + 1 < 9$

المُتباينةُ المُعطاة $-3 < -2x + 1 < 9$

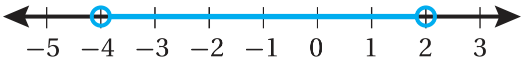
بطرحِ 1 مِنْ كلِّ طَرَفٍ $-3 - 1 < -2x + 1 - 1 < 9 - 1$

بالتبسيطِ $-4 < -2x < 8$

بِقسمَةِ كلِّ طَرَفٍ على -2 $\frac{-4}{-2} > \frac{-2x}{-2} > \frac{8}{-2}$

بالتبسيطِ $2 > x > -4$

إذنْ، مجموعةُ الحلِّ $\{x \mid -4 < x < 2\}$ أوْ $(-4, 2)$، وتمثيلُها بيانيًّا علَى النَّحوِ الآتي:



أتحقَّقُ من فهمي

أَجِدُ مجموعةَ حلِّ كلِّ مُتباينةٍ ممّا يأتي، ثمَّ أُمَثِّلُها على خطِّ الأعدادِ:

a) $-5 < x - 4 < 2$

b) $-2 < -3x - 8 \le 10$

يمكنُ أيضًا حلُّ المُتبايناتِ المُرَكَّبَةِ الَّتي تحتوي على أداةِ الرَّبطِ (أو) باستعمالِ خصائصِ المُتبايناتِ.

مثال 4

أَجِدُ مجموعةَ حلِّ كلِّ مُتباينةٍ ممّا يأتي، ثمَّ أُمَثِّلُها بيانيًّا:

1 $2x + 3 < 5 \text{ or } x + 7 > 11$

$$2x + 3 < 5 \qquad \text{or} \qquad x + 7 > 11$$

بالطرحِ

$$2x + 3 - 3 < 5 - 3 \qquad x + 7 - 7 > 11 - 7$$

بالتبسيطِ

$$2x < 2 \qquad x > 4$$

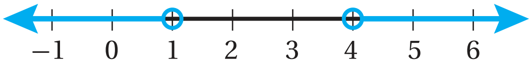
بالقِسمَةِ

$$\frac{2x}{2} < \frac{2}{2}$$

بالتبسيطِ

$$x < 1 \qquad \text{or} \qquad x > 4$$

إذنْ، مجموعةُ الحلِّ $\{x \mid x < 1 \text{ or } x > 4\}$ أوْ $(-\infty, 1) \cup (4, \infty)$، وتمثيلُها بيانيًّا علَى النَّحوِ الآتي:



2 $-3x + 4 < 19 \text{ or } 7x - 3 > 18$

$$-3x + 4 < 19 \qquad \text{or} \qquad 7x - 3 > 18$$

بالطرحِ أوِ الجمعِ

$$-3x + 4 - 4 < 19 - 4 \qquad 7x - 3 + 3 > 18 + 3$$

بالتبسيطِ

$$-3x < 15 \qquad 7x > 21$$

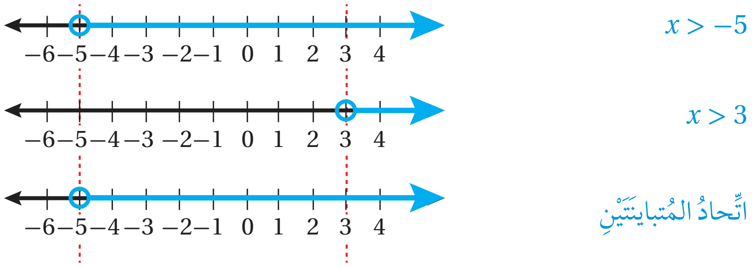
بالقِسمَةِ

$$\frac{-3x}{-3} > \frac{15}{-3} \qquad \frac{7x}{7} > \frac{21}{7}$$

بالتبسيطِ

$$x > -5 \qquad \text{or} \qquad x > 3$$

مجموعةُ حلِّ المُتباينةِ هِيَ اتِّحادُ المُتباينتَيْنِ. إذنْ، أُمَثِّلُ كُلًّا مِنَ المُتباينتَيْنِ الآتيتَيْنِ، ثمَّ أَجِدُ اتِّحادَ التمثيلَيْنِ:



أتعلَّم

تكونُ المُتباينةُ المُرَكَّبَةُ الَّتي تحتوي علَى أداةِ الرَّبطِ (و) صحيحةً إذا كانتِ المُتباينتانِ المُكَوِّنَتانِ لها صحيحتَيْنِ، أمّا المُتباينةُ المُرَكَّبَةُ الَّتي تحتوي على أداةِ الرَّبطِ (أو) فتكونُ صحيحةً إذا كانتْ إحدَى المُتباينتَيْنِ المُكَوِّنَتَيْنِ لها علَى الأقلِّ صحيحةً.

أتعلَّم

عندَ إيجادِ مجموعةِ حلِّ مُتباينةٍ مُرَكَّبَةٍ تحتوي علَى أداةِ الرَّبطِ (or)، يُفَضَّلُ تمثيلُ كلِّ مُتباينةٍ علَى حِدَةٍ، ثمَّ إيجادُ اتِّحادِ التمثيلَيْنِ البيانيَّيْنِ، لا سِيَّما عندَ تغييرِ اتِّجاهِ رمزِ المُتباينةِ، أوْ إذا كانَ للمُتباينتَيْنِ الأصليَّتَيْنِ الاتِّجاهُ نفسُهُ.

أُلاحِـظُ أنَّ التمثيلَ البيانيَّ للمُتبايِنةِ $x > -5$ يحتوي على جميعِ نقاطِ التمثيلِ البيانيِّ للمُتبايِنةِ $x > 3$؛ لِذا يكـونُ الاتِّحادُ هُوَ التمثيــلُ البيانيُّ للمُتبايِنةِ $x > -5$، وتكـونُ مجموعةُ الحلِّ $\{x \mid x > -5\}$ أوْ $(-5, \infty)$.

أتحقَّقُ من فهمي

أَجِدُ مجموعةَ حلِّ كلِّ مُتبايِنةٍ ممّا يأتي، ثمَّ أُمَثِّلُها على خطِّ الأعدادِ:

a) $x + 2 \le 5 \text{ or } x - 4 \ge 2$

b) $-2x + 7 \le 13 \text{ or } 5x + 12 < 37$

يمكنُ استعمالُ المُتبايناتِ وَحَلُّها فِي الكثيرِ مِنَ التطبيقاتِ الحياتيَّة.

مثال 5 : من الحياة

درجةُ الحرارةِ: تتراوحُ درجةُ حرارةِ مُحَرِّكِ سيّارةٍ في أثناءِ تشغيلِهِ بينَ 90°C و 110°C. أكتبُ مُتبايِنةً مُرَكَّبةً تمثِّلُ درجةَ حرارةِ مُحَرِّكِ السيّارةِ في أثناءِ تشغيلِهِ وَأُمَثِّلُها بيانيًّا، ثمَّ أُحَوِّلُ المُتبايِنةَ إلى الدرجةِ الفهرنهايتيَّةِ. علمًا أنَّ $°C = \frac{5}{9}(°F - 32)$

أختارُ مُتَغَيِّرًا: لِيَكُنْ C درجةَ حرارةِ المُحَرِّكِ.

أكتبُ المُتبايِنةَ: $90 \le C \le 110$

أُمَثِّلُ على خطِّ الأعدادِ:

أفترضُ أنَّ F درجةُ الحرارةِ بالفهرنهايت، وَمِنْهُ:

المُتبايِنةُ	$90 \le C \le 110$
بالتعويضِ عن C بـ $\frac{5}{9}(F-32)$	$90 \le \frac{5}{9}(F-32) \le 110$
بضربِ كلِّ طَرَفٍ بـ $\frac{5}{9}$	$162 \le F - 32 \le 198$
بجمعِ 32 لكلِّ طَرَفٍ	$194 \le F \le 230$

إذنْ، تتراوحُ درجةُ حرارةِ المُحَرِّكِ في أثناءِ التشغيلِ بينَ 194°F و 230°F

أتحقَّق من فهمي

درجةُ الحرارةِ: إذا عَلِمتُ أنَّ درجةَ حرارةِ الجسمِ الطبيعيَّةَ للأشخاصِ البالغينَ تتراوحُ بيـنَ 36.1°C و 37.2°C، فأكتبُ مُتباينةً مُرَكَّبَةً تمثِّلُ درجةَ حرارةِ الشـخصِ البالـغِ وَأُمَثِّلُها بيانيًّا، ثمَّ أُحـوِّلُ المُتباينةَ إلى الدرجةِ الفهرنهايتيَّةِ. علمًا أنَّ $°C = \frac{5}{9}(°F - 32)$

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أكتبُ مُتباينةً تمثِّلُ كلَّ جملةٍ ممّا يأتي، ثمَّ أُمَثِّلُها على خطِّ الأعدادِ:

1 عددٌ أكبرُ مِنْ −7 وأقلُّ مِنْ 2

2 عددٌ أقلُّ مِنْ أوْ يُساوي −5 أوْ أكبرُ مِنْ 12

3 عددٌ يقعُ بينَ −10 وَ 10

4 عددٌ علَى الأكثرِ −2 أوْ علَى الأقلِّ 9

5 ناتجُ ضربِ عددٍ في −5 أكبرُ مِنْ 35 أوْ أقلُّ مِنْ 10

6 عددٌ مطروحٌ مِنْهُ 8 لا يزيدُ على 4 ولا يقلُّ عَنْ 5

أكتبُ كلَّ مُتباينةٍ مُرَكَّبَةٍ ممّا يأتي باستعمالِ رمزِ الفترةِ، ثمَّ أُمَثِّلُها على خطِّ الأعدادِ:

7 $x \geq 4$ or $x \leq 7$

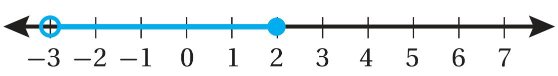
8 $-2 < x < 4$

9 $x < 2$ or $x \geq 15$

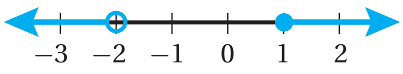
10 $-5 \leq x \leq 10$

أكتبُ مُتباينةً مُرَكَّبَةً تُعبِّرُ عَنْ كلِّ تمثيلٍ ممّا يأتي، ثمَّ أُعبِّرُ عنها برمزِ الفترةِ:

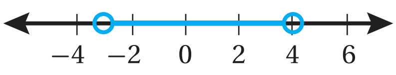
11



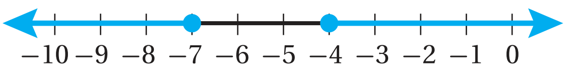
12



13



14



أَجِدُ مجموعةَ حلِّ كلِّ مُتباينةٍ ممّا يأتي، ثمَّ أُمَثِّلُها على خطِّ الأعدادِ:

15 $-5 < x + 1 < 4$

16 $\frac{1}{2} < \frac{3x-1}{4} \leq 5$

17 $-9 < 3x + 6 \leq 18$

18 $x + 1 < -3$ or $x - 2 > 0$

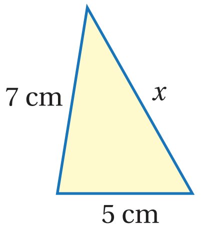
19 $2r + 3 < 7$ or $-r + 9 \leq 2$

20 $2n + 11 \leq 13$ or $-3n \geq -12$

21 **سُعراتٌ حراريَّةٌ:** إذا عَلِمتُ أنَّ حاجةَ الرياضيِّ مِنَ الطاقةِ تعتمدُ على عواملَ عِدَّةٍ، مِنْ أهمِّها كتلتُهُ وسرعةُ التمرينِ، وكانَ الرياضيُّ يحتاجُ يوميًّا ما بينَ 3000 وَ 4500 سعرةٍ حراريَّةٍ، فأكتبُ مُتباينةً تمثِّلُ السُّعراتِ الحراريَّةَ الَّتي يحتاجُ إليها الرياضيُّ، وَأُمَثِّلُها بيانيًّا.

مهاراتُ التفكيرِ العليا

تبريرٌ: إذا كانَ طولَي أيِّ ضلعَيْنِ فِي المُثَلَّثِ أكبرَ مِنْ طولِ الضِّلعِ الثالثِ، فأستعمِلُ هذه الحقيقةَ للإجابةِ عَنِ السؤالَيْنِ الآتيَيْنِ تِباعًا:



22 هلْ يمكنُ أنْ تكونَ قيمةُ x فِي المُثَلَّثِ المُجاوِرِ 1 cm؟ أُبَرِّرُ إجابتي.

23 أستعمِلُ المُثَلَّثَ المُجاوِرَ لكتابةِ مُتباينةٍ تُحَدِّدُ قِيَمَ x المُمكِنَةَ، مُبَرِّرًا إجابتي.

24 **أكتشفُ الخطأَ:** ناتجُ تقريبِ العددِ x إلى أقربِ 100 هُوَ 400. تقولُ عبيرُ إنَّ المُتباينةَ $395 \leq x < 405$ تُعَبِّرُ عَنْ جميعِ قِيَمِ x المُحتَمَلَةِ، وتقولُ لمياءُ إنَّ المُتباينةَ $350 \leq x < 450$ تُعَبِّرُ عَنْ جميعِ قِيَمِ x المُحتَمَلَةِ. أيُّهُما إجابتُها صحيحةٌ؟ أُبَرِّرُ إجابتي.

تبريرٌ: أَجِدُ مجموعةَ حلِّ كلِّ مُتباينةٍ ممّا يأتي، مُبَرِّرًا إجابتي:

25 $-1 + x < 3$ or $-x \geq -4$

26 $3x - 7 \geq 5$ and $2x + 6 \leq 12$

الدرس 3

حلُّ مُعادلاتِ القيمةِ المُطلقةِ ومُتبايناتِها

Solving Absolute-Value Equations and Inequalities

فكرة الدرس حلُّ مُعادلاتِ القيمةِ المُطلقةِ ومُتبايناتِها.

المصطلحات مُعادلةُ القيمةِ المُطلقةِ، مُتباينةُ القيمةِ المُطلقةِ.

مسألة اليوم استعملَتْ مريمُ 8 g مِنْ مادَّةٍ كيميائيَّةٍ في تجرِبةٍ علميَّةٍ. إذا كانتْ دِقَّةُ الميزانِ المِخبريِّ الَّذي استعمَلَتْهُ مريمُ تُحَدِّدُ الكتلةَ بهامشِ خطأٍ لا يتجاوزُ 0.1 g ±، فاكتبْ مُتباينةَ قيمةٍ مُطلقةٍ تُحَدِّدُ الكتلةَ الحقيقيَّةَ للمادَّةِ الَّتي استعمَلَتْها.

مقاديرُ القيمةِ المُطلقةِ

تعلَّمتُ سابقاً أنَّ المقدارَ الجبريَّ هُوَ مجموعةٌ مِنَ الحُدودِ الجبريَّةِ والثابتةِ تفصلُ بينها إشاراتُ جمعٍ أوْ طرحٍ.

حَدٌّ جبريٌّ: $5x$ **مقدارٌ جبريٌّ:** $5x + 3$

ويمكنُ أنْ يتضمَّنَ المقدارُ الجبريُّ قيمةً مُطلقةً. ولإيجادِ قيمتِهِ، أُعَوِّضُ قيمةَ المُتغيِّرِ الَّذي يحتويهِ، ثمَّ أتَّبِعُ أولوياتِ العملياتِ.

مثال 1

أجِدُ قيمةَ كلٍّ مِنَ المقاديرِ الآتيةِ عندَ القيمةِ المُعطاة:

1 $|x+3| - 8, x = 2$

$|x+3| - 8 = |2+3| - 8$ بتعويضِ $x = 2$

$= |5| - 8$ $2+3=5$

$= 5 - 8$ $|5| = 5$

$= -3$ بالتبسيطِ

أتعلَّمُ

لإيجادِ قيمةِ مقدارٍ جبريٍّ يتضمَّنُ قيمةً مُطلقةً أُجري العملياتِ الحسابيةَ داخلَ القيمةِ المُطلقةِ أوَّلًا.

② $10 - |5 - 2x|, x = 7$

$10 - |5 - 2x| = 10 - |5 - 2(7)|$ بالتعويضِ x = 7

$= 10 - |5 - 14|$ 2(7) = 14

$= 10 - 9$ 5−14= −9

$= 10 - 9$ |−9| = 9

$= 1$ بالتبسيطِ

أتحقَّق من فهمي

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ مِنَ المقاديرِ الآتيةِ عندَ القيمةِ المُعطاة:

a) $|x - 2| + 10, x = -4$

b) $-2\,|3x + 1|, x = -1$

مُعادلاتُ القيمةِ المُطلقةِ

مُعادلةُ القيمةِ المُطلقةِ (absolute value equation) هِيَ مُعادلةٌ تحتوي على قيمةٍ مُطلقةٍ. وَبِما أنَّ القيمةَ المُطلقةَ لكلٍّ مِنَ العددِ ومعكوسِهِ متُساويتانِ فيمكنُ تحويلُ مُعادلةِ القيمةِ المُطلقةِ إلى مُعادلتَيْنِ مُرتبطتَيْنِ بها لا تحتويانِ على رمزِ القيمةِ المُطلقةِ، وذلكَ بجعلِ العبارةِ الَّتي داخلَ القيمةِ المُطلقةِ موجبةً مَرَّةً وسالبةً مَرَّةً أُخرى.

أتذكَّرُ

القيمةُ المُطلقةُ للعددِ هِيَ المسافةُ بينَ ذلكَ العددِ والصِّفرِ على خطِّ الأعدادِ.

مفهومٌ أساسيٌّ

حلُّ مُعادلاتِ القيمةِ المُطلقةِ

لحلِّ المُعادلةِ $|ax + b| = c$؛ حيثُ $c \geq 0$، أَحُلُّ المُعادلتَيْنِ المُرتبطتَيْنِ بها، وَهُما:

$$ax + b = c \qquad \text{or} \qquad ax + b = -c$$

مثال 2

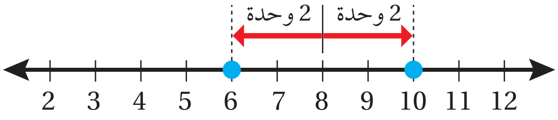
أَحُلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ، وَأُمَثِّلُ مجموعةَ الحلِّ على خطِّ الأعدادِ (إنْ أمكَنَ):

① $|x-8|=2$

بكتابةِ المُعادلتَيْنِ المُرتبطتَيْنِ $x-8=2$ or $x-8=-2$

بجمعِ 6 لكلِّ طَرَفٍ $x=10$ $x=6$

إذنْ، مجموعةُ حلِّ المُعادلةِ هِيَ $\{6, 10\}$، وَتَمثيلُها البيانيُّ علَى النَّحوِ الآتي:



② $2|x-4|+10=16$

لحلِّ هذهِ المُعادلةِ، أكتبُ القيمةَ المُطلقةَ أوَّلًا معزولةً في أحدِ طَرَفَي المُعادلةِ.

المُعادلةُ المُعطاةُ $2|x-4|+10=16$

بطرحِ 10 مِنْ طَرَفَي المُعادلةِ $2|x-4|=6$

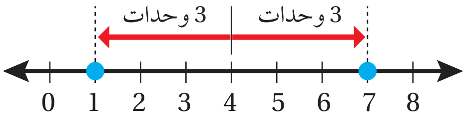
بِقسمَةِ طَرَفَي المُعادلةِ على 2 $|x-4|=3$

الآنَ، أكتبُ مُعادلتين مُرتبطتين بالمُعادلة $|x-4|=3$، ثم أحل كلًّا منهما.

بكتابةِ المُعادلتَيْنِ المُرتبطتَيْنِ $x-4=3$ or $x-4=-3$

بجمعِ 4 لكلِّ طَرَفٍ $x=7$ $x=1$

إذنْ، مجموعةُ حلِّ المُعادلةِ هِيَ $\{1, 7\}$، وَتَمثيلُها البيانيُّ علَى النَّحوِ الآتي:



أتعلَّم

تعني المُعادلةُ $|x-8|=2$ أنَّ المسافةَ بينَ x و 8 تُساوي 2 وِحدَةً.

3 $|3x + 1| = -5$

المُعادلــةُ $|3x + 1| = -5$ تعني أنَّ المســـافةَ بينَ $3x$ وَ -1 تُســاوي -5. وبِما أنَّهُ لا يمكنُ أنْ تكونَ المسافةُ سالبةً فإنَّ مجموعةَ حلِّ هذهِ المُعادلةِ $\varnothing$

أتحقَّقُ من فهمي

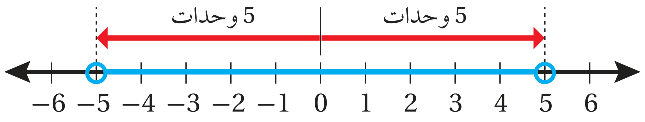
أَحُلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ، وَأُمَثِّلُ مجموعةَ الحلِّ على خطِّ الأعدادِ (إنْ أمكَنَ):

a) $|x - 7| = 5$ **b)** $4|2x + 7| = 16$ **c)** $|x + 4| = -10$

مُتبايناتُ القيمةِ المُطلقةِ

مُتباينةُ القيمةِ المُطلقةِ (absolute value inequality) هِيَ مُتباينةٌ تحتوي على قيمةٍ مُطلقةٍ.

فمثلًا، $|x| < 5$ هِيَ مُتباينةُ قيمةٍ مُطلقةٍ، وتعني أنَّ المسافةَ بينَ x وَ 0 أقلُّ مِنْ 5؛ لِذا فإنَّ $x < 5$ وَ $x > -5$



وبذلكَ، فإنَّ مجموعةَ حلِّ هذهِ المُتباينةِ هِيَ الفترةُ $(-5, 5)$.

وبشـــكلٍ عامٍّ، يمكنُ تحويلُ مُتباينةِ القيمةِ المُطلقةِ، الَّتي تحتوي على الرَّمزِ (<)، إلى مُتباينةٍ مُرَكَّبَةٍ تحتوي على أداةِ الرَّبطِ (و)، ثمَّ حلُّ المُتباينةِ المُرَكَّبَةِ الناتجةِ.

مفهومٌ أساسيٌّ

حلُّ مُعادلاتِ القيمةِ المُطلقةِ (<)

لحلِّ المُتباينةِ $|ax + b| < c$؛ حيثُ $c > 0$، أَحُلُّ المُتباينةَ المُرَكَّبَةَ المُرتبطةَ بها، وَهِيَ:

$$-c < ax + b < c$$

تبقى القاعدةُ صحيحةً إذا احتوَتِ المُتباينةُ على (≤)

مثال 3

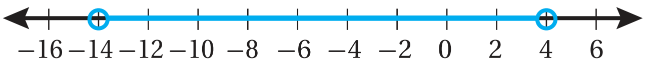
أَحُلُّ كُلًّا مِنَ المُتبايناتِ الآتيةِ، وَأُمَثِّلُ مجموعةَ الحلِّ على خطِّ الأعدادِ (إنْ أمكَنَ):

1 $|x + 5| < 9$

$-9 < x + 5 < 9$ المُتباينةُ المُركَّبةُ المُرتبطةُ

$-14 < x < 4$ بطرحِ 5 مِنْ كِلا الطَّرَفَيْنِ

إذنْ، مجموعةُ حلِّ المُتباينةِ $\{x \mid -14 < x < 4\}$ أوْ $(-14, 4)$، وَتَمثيلُها بيانيًّا علَى النَّحوِ الآتي:



2 $-4|x + 3| - 2 \geq 6$

لحلِّ هذهِ المُتباينةِ، أكتبُ أوَّلًا مقدارَ القيمةِ المُطلقةِ معزولًا في أحدِ طرَفَيِ المُتباينةِ.

$-4|x + 3| - 2 \geq 6$ المُتباينةُ المُعطاةُ

$-4|x + 3| \geq 8$ بجمعِ 2 لِطرَفَيِ المُتباينةِ

$|x + 3| \leq -2$ بِقسمَةِ طرَفَيِ المُتباينةِ على -4

بِما أنَّ $|x + 3|$ لا يمكنُ أنْ تكونَ سالبةً، فلا يمكنُ أنْ تكونَ $|x + 3|$ أقلَّ مِنْ -2، وَمِنْهُ فإنَّ مجموعةَ حلِّ هذهِ المُتباينةِ $\varnothing$

أتحقَّقُ من فهمي

أَحُلُّ كُلًّا مِنَ المُتبايناتِ الآتيةِ، وَأُمَثِّلُ مجموعةَ الحلِّ على خطِّ الأعدادِ (إنْ أمكَنَ):

a) $|x - 2| \leq 1$

b) $|x + 7| + 10 < 2$

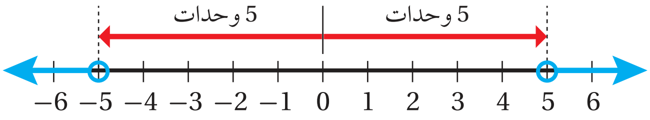
أتعلَّمُ

المُتباينةُ $|x + 5| < 9$ تعني أنَّ المسافةَ بينَ x وَ -5 أقلُّ مِنْ 9 وحداتٍ.

أتذكَّرُ

يُستعمَلُ] أوْ [للدَّلالةِ علَى انتماءِ طرفِ الفترةِ إليها، أمّا الرَّمزُ) أوْ (فَيُستعمَلُ للدَّلالةِ على عدمِ انتماءِ طرفِ الفترةِ إليها.

تعنـي مُتباينـةُ القيمةِ المُطلقةِ $|x| > 5$ أنَّ المسـافةَ بينَ x وَ 0 أكبرُ مِنْ 5؛ لـذا فإنَّ $x > 5$ أوْ $x < -5$



وبذلكَ، فإنَّ مجموعةَ حلِّ هذهِ المُتباينةِ هِيَ الفترةُ $(-\infty, -5) \cup (5, \infty)$

وبشـكلٍ عامٍّ، يمكنُ تحويلُ مُتباينةِ القيمةِ المُطلقةِ، الَّتي تحتوي على الرَّمزِ (>)، إلى مُتباينةٍ مُرَكَّبَةٍ تحتوي على أداةِ الرَّبطِ (أو)، ثمَّ حلُّ المُتباينةِ المُرَكَّبَةِ الناتجةِ.

مفهومٌ أساسيٌّ **حلُّ مُعادلاتِ القيمةِ المُطلقةِ (>)**

لحلِّ المُتباينةِ $|ax + b| > c$؛ حيثُ $c > 0$، أَحُلُّ المُتباينةَ المُرَكَّبَةَ المُرتبطةَ بها، وَهِيَ:

$$ax + b < -c \qquad \text{or} \qquad ax + b > c$$

تبقَى القاعدةُ صحيحةً إذا احتوَتِ المُتباينةُ على (≥)

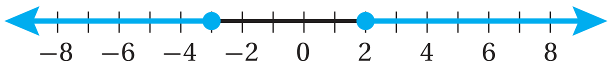
مثال 4

أَحُلُّ كُلًّا مِنَ المُتبايناتِ الآتيةِ، وَأُمَثِّلُ مجموعةَ الحلِّ على خطِّ الأعدادِ (إنْ أمكنَ):

1 $|2x + 1| \geq 5$

المُتباينةُ المُرَكَّبَةُ المُرتبطةُ	$2x + 1 \geq 5$	or	$2x + 1 \leq -5$
بطرحِ 1 مِنْ كُلِّ طَرَفٍ	$2x \geq 4$		$2x \leq -6$
بِقسمَةِ كُلِّ طَرَفٍ على 2	$x \geq 2$	or	$x \leq -3$

إذنْ، مجموعـةُ الحلِّ هِيَ $\{x \mid x \leq -3 \text{ or } x \geq 2\}$، ويمكنُ كتابتُها باسـتعمالِ رمزِ الفترةِ على صورةِ: $(-\infty, -3] \cup [2, \infty)$، وَتَمثيلُها البيانيُّ علَى النَّحوِ الآتي:



2 $|4x+8| \geq -3$

يَنُصُّ تعريفُ القيمةِ المُطلقةِ على أنَّ مقدارَها يجبُ أنْ يكونَ أكبرَ مِنْ أوْ يُساوي صِفرًا، وَمِنْهُ فإنَّ $|4x + 8|$ دائمًا أكبرُ مِنْ -3 لأيٍّ مِنْ قِيَمِ المُتَغيِّرِ x

إذنْ، مجموعةُ الحلِّ هِيَ مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيَّةِ R أوْ $(-\infty, \infty)$.

رُموزٌ رياضيَّةٌ

يُرمَزُ لمجموعةِ الأعدادِ الحقيقيَّةِ بالرَّمزِ R

أتحقَّق من فهمي

أَحُلُّ كُلًّا مِنَ المُتبايناتِ الآتيةِ، وَأُمَثِّلُ مجموعةَ الحلِّ على خطِّ الأعدادِ (إنْ أمكَنَ):

a) $|x-3| \geq 4$

b) $|10-x| \geq -5$

يمكنُ استعمالُ المُتبايناتِ وَحَلُّها فِي الكثيرِ مِنَ التطبيقاتِ الحياتيَّةِ.

مثال 5 : من الحياة

صناعةٌ: إذا عَلِمتُ أنَّ مصنعًا يُنتِجُ رُؤوسَ مثاقبَ طولُ قُطرِ أحَدِها المثاليُّ **0.625 cm**، وَيُسمَحُ أنْ يزيدَ طولُ هذا القُطرِ أوْ يقلَّ بمقدارٍ لا يتجاوزُ **0.005 cm**، فأكتبُ مُتباينةَ قيمةٍ مُطلقةٍ أَجِدُ مِنْ خِلالِها المدى المسموحَ بِه لطولِ قُطرِ رأسِ المِثقبِ.

بالكلماتِ: الفرقُ بينَ طولِ القُطرِ الحقيقيِّ وطولِ القُطرِ المثاليِّ لا يتجاوزُ 0.005

أختارُ مُتَغيِّرًا: لِيكُنْ x مُمَثِّلًا طولَ قُطرِ رأسِ المِثقبِ.

أكتبُ المُتباينةَ: $|x - 0.625| \leq 0.005$

$|x-0.625| \leq 0.005$ المُتباينةُ

$-0.005 \leq x-0.625 \leq 0.005$ المُتباينةُ المُركَّبَةُ المُرتبطةُ

$0.62 \leq x \leq 0.63$ بجمعِ 0.625 لِكِلا الطَّرَفَيْنِ

إذنْ، المدى المسموحُ بِهِ لطولِ قُطرِ رأسِ المِثقبِ هُوَ $[0.62, 0.63]$

أتحقَّق من فهمي

صناعةٌ: إذا عَلِمتُ أنَّ طولَ القُطرِ المثاليِّ لأحدِ المكابسِ الأُسطوانيَّةِ في مُحَرِّكاتِ السيّاراتِ 90 mm، وَيُسمَحُ أنْ يزيدَ طولُ هذا القُطرِ أوْ يقلَّ بمقدارٍ لا يتجاوزُ 0.008 mm، فأكتبُ مُتباينةَ قيمةٍ مُطلقةٍ أَجِدُ مِنْ خِلالِها المدى المسموحَ بِهِ لطولِ قُطرِ المكبسِ.

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ مِنَ المقاديرِ الآتيةِ عندَ القيمةِ المُعطاةِ:

1 $|5x + 2| + 1, x = -3$

2 $|14 - x| - 18, x = 1$

3 $-3|3x + 8| + 5, x = -4$

أَحُلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ، وَأُمَثِّلُ مجموعةَ الحلِّ على خطِّ الأعدادِ (إنْ أمكَنَ):

4 $|x + 3| = 7$

5 $|x - 8| = 14$

6 $|-3x| = 15$

7 $|3x + 2| + 2 = 5$

8 $|2x - 4| - 8 = 10$

9 $-4|8 - 5x| = 16$

أَحُلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ، وَأُمَثِّلُ مجموعةَ الحلِّ على خطِّ الأعدادِ (إنْ أمكَنَ):

10 $|x + 8| \leq 3$

11 $|2x - 5| < 9$

12 $|3x + 1| > 8$

13 $|3x - 1| + 6 > 0$

14 $2|3x + 8| - 13 \leq -5$

15 $-3|2 - 4x| + 5 < -13$

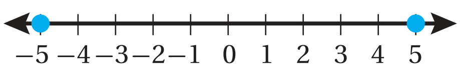
16 $|6x + 2| < -4$

17 $3|5x - 7| - 6 < 24$

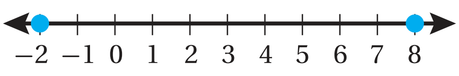
18 $|5x + 3| - 4 \geq 9$

أكتبُ مُعادلةَ قيمةٍ مُطلقةٍ تُعَبِّرُ عَنْ كُلِّ تمثيلٍ بيانيٍّ ممّا يأتي:

19

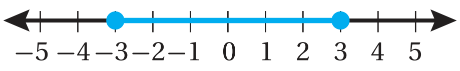


20

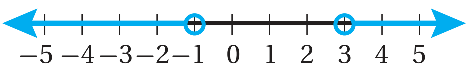


أكتبُ مُتباينةَ قيمةٍ مُطلقةٍ تُعبِّرُ عَنْ كُلِّ تمثيلٍ بيانيٍّ ممّا يأتي:

21



22



أكتبُ مُتباينةً تمثِّلُ كلَّ جملةٍ ممّا يأتي، ثمَّ أُمَثِّلُها على خطِّ الأعدادِ:

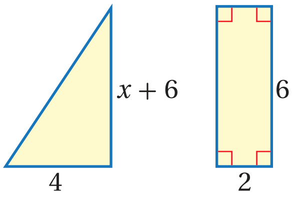
23 المسافةُ بينَ عددٍ والصِّفرِ أكبرُ مِنْ 7

24 المسافةُ بينَ عددٍ وَ3 أقلُّ مِنْ أوْ تُساوي 4

25 **صناعةٌ:** إذا عَلِمتُ أنَّ مصنعًا يُنتِجُ علبَ بسكويتٍ كتلتُها 454 g، وكانَ مراقبُ الجَودةِ يَستثني العلبَ الَّتي تتجاوزُ كتلتُها الكتلةَ المثاليَّةَ أوْ تقلُّ عنها بِمقدارِ 5 g، فأكتبُ مُتباينةَ قيمةٍ مُطلقةٍ أَجِدُ مِنْ خِلالِها المدى المسموحَ بِهِ لِكُتَلِ علبِ البسكويتِ.

26 **كرةُ قَدَمٍ:** إذا كانتِ الكتلةُ المثاليَّةُ المُوصى بها لكرةِ القدمِ 430 g، وكانَ مسموحًا أنْ تزيدَ علَى الكتلةِ المثاليَّةِ أوْ تنقُصَ عنها بِمقدارِ 20 g، فأكتبُ مُعادلةَ قيمةٍ مُطلقةٍ وَأَحُلُّها لإيجادِ أكبرِ وأقلِّ كتلةٍ مسموحٍ بها لكرةِ القدمِ.

مهاراتُ التفكيرِ العليا



27 **تبريرٌ:** يُبيِّنُ الشكلُ المجاوِرُ مُثَلَّثًا وَمُستطيلًا الفرقُ بينَ مساحتَيْهما أقلُّ مِنْ 2 وحدةٍ مُرَبَّعَةٍ. أكتبُ مُتباينةَ قيمةٍ مُطلقةٍ تمثِّلُ الجملةَ السابقةَ وَأَحُلُّها، مُبرِّرًا إجابتي.

28 **تَحَدٍّ:** أَحُلُّ المُتباينةَ المُركَّبَةَ الآتيةَ: $|x+2| > 8$ and $|x-3| < 4$

الدرس
4

تمثيلُ المُتبايناتِ الخطيَّةِ بِمُتَغيِّرَيْنِ بيانيًّا
Graphing Linear Inequalities in Two Variables

فكرة الدرس تمثيلُ مُتباينةٍ خطيَّةٍ بِمُتَغيِّرَيْن بيانيًّا.

المصطلحات المُتباينةُ الخطيَّةُ بِمُتَغيِّرَيْن، منطقةُ الحلولِ الممكنةِ، المُستقيم الحُدوديُّ.

مسألة اليوم تعملُ شركةٌ على تجميعِ نوعَيْنِ مُختلفَيْنِ مِنْ أجهزةِ المايكروييف. إذا كانَ تجميعُ الجهازِ الواحدِ مِنَ النَّوعِ الأوَّلِ يحتاجُ إلى ساعَتَيْن، وتجميعُ الجهازِ الثاني يحتاجُ إلى 1.5 ساعةٍ، وكانَ الحدُّ الأقصى لعددِ ساعاتِ العملِ أُسبوعيًّا 80 ساعةً، فأكتبُ مُتباينةً خطيَّةً بِمُتَغيِّرَيْنِ تمثِّل عددَ أجهزةِ المايكروييفِ الَّتي يمكنُ للشركةِ تجميعُها مِنْ كلِّ نوعٍ.

المُتبايناتُ الخطيَّةُ بِمُتَغيِّرَيْنِ

المُتباينةُ الخطيَّةُ بِمُتَغيِّرَيْنِ (linear inequality in two variables) هِيَ مُتباينةٌ يمكنُ كتابتُها على إحدى الصُّوَرِ الآتية:

$ax + by < c$ $ax + by \le c$ $ax + by > c$ $ax + by \ge c$

حيثُ a, b, c أعدادٌ حقيقيَّةٌ، وَحَلُّ المُتباينةِ الخطيَّةِ بِمُتَغيِّرَيْنِ هُوَ الزَّوجُ المُرَتَّبُ (x, y)، الَّذي يجعلُ المُتباينةَ صحيحةً عندَ تعويضِ إحداثيَّيْهِ فيها.

أتعلَّم

لكلِّ مُتباينةٍ خطيَّةٍ مُعادلةٌ خطيَّةٌ مُرتبطةٌ بها. فمثلًا، $x + 2y > 1$ هِيَ مُتباينةٌ خطيَّـةٌ، وَ $x + 2y = 1$ هِـيَ المُعادلـةُ الخطيَّةُ المُرتبطةُ بها.

مثال 1

أُحدِّدُ إذا كانَ كلُّ زوجٍ مُرَتَّبٍ ممّا يأتي يمثِّلُ حَلًّا للمُتباينةِ $3x + y < 7$:

1 **$(-3, 1)$**

أُعوِّضُ الزَّوجَ المُرَتَّبَ $(-3, 1)$ فِي المُتباينةِ:

$3x + y < 7$ المُتباينةُ المُعطاةُ

$3(-3) + 1 \overset{?}{<} 7$ بتعويضِ $x = -3, y = 1$

$-8 < 7$ ✓ النّاتجُ صحيحٌ

أُلاحِظُ عندَ تعويضِ الزَّوجِ المُرَتَّبِ فِي المُتباينةِ أنَّ النّاتجَ يكونُ صحيحًا.

إذنْ، الزَّوجُ المُرَتَّبُ $(-3, 1)$ يمثِّلُ حَلًّا لها.

2 **(2, 4)**

أُعَوِّضُ الزَّوجَ المُرَتَّبَ (2, 4) فِي المُتبايِنةِ:

المُتبايِنةُ المُعطاةُ $3x + y < 7$

بتعويضِ $x = -3, y = 1$ $3(2) + 4 \overset{?}{<} 7$

النَّاتجُ غيرُ صحيحٍ $10 \nless 7$ ✗

أُلاحِظُ عندَ تعويضِ الزَّوجِ المُرَتَّبِ فِي المُتبايِنةِ أنَّ الناتجَ لا يكونُ صحيحًا.

إذنْ، الزَّوجُ المُرَتَّبُ (2, 4) لا يمثِّلُ حَلًّا لها.

أتعلَّم

يُستعمَلُ الرَّمزُ $\nless$ للدَّلالةِ على عدمِ تحقُّقِ المُتبايِنةِ.

3 **(0, 2)**

أُعَوِّضُ الزَّوجَ المُرَتَّبَ (0, 2) فِي المُتبايِنةِ:

المُتبايِنةُ المُعطاةُ $3x + y < 7$

بتعويضِ $x = -3, y = 1$ $3(0) + 2 \overset{?}{<} 7$

النَّاتجُ صحيحٌ $2 < 7$ ✓

أُلاحِظُ عندَ تعويضِ الزَّوجِ المُرَتَّبِ فِي المُتبايِنةِ أنَّ الناتجَ يكونُ صحيحًا.

إذنْ، الزَّوجُ المُرَتَّبُ (0, 2) يمثِّلُ حَلًّا لها.

أتحقَّق من فهمي

أُحَدِّدُ إذا كانَ كلُّ زوجٍ مُرَتَّبٍ ممّا يأتي يمثِّلُ حَلًّا للمُتبايِنةِ $-2x + 3y \geq 3$:

a) (4, 1)

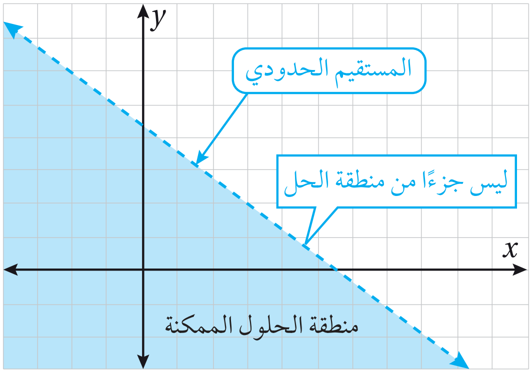
b) (−1, 2)

c) (0, 1)

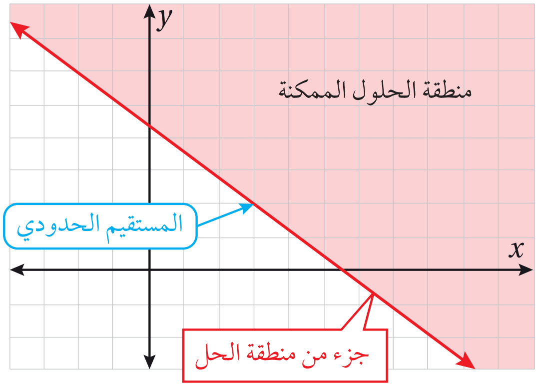
تمثيلُ المُتبايناتِ الخطيَّةِ بِمُتَغيِّرَيْنِ بيانيًّا

أُلاحِظُ مِنَ المثالِ السابقِ أنَّ مجموعةَ حَلِّ المُتباينةِ الخطيَّةِ بِمُتَغيِّرَيْنِ تتكوَّنُ مِنَ العديدِ مِنَ الأزواجِ المُرَتَّبَةِ الَّتي تحقِّقُ المُتباينةَ، وعندَ تمثيلِ المُتباينةِ الخطيَّةِ بِمُتَغيِّرَيْنِ بيانيًّا علَى المُستوى الإحداثيِّ فإنَّ النقاطَ الَّتي تُمثِّلُ جميعَ حُلولِها المُمكِنَةَ تُسَمّى **منطقةَ الحُلولِ المُمكِنةِ** (feasible region)، ويُسَمّى المُستقيم الَّذي يُقَسِّمُ المُستوى الإحداثيَّ إلى جُزأينِ، أحدُهما منطقةُ الحُلولِ المُمكِنةِ، **المُستقيم الحُدوديَّ** (boundary line).

وَقَد يكونُ المُستقيم الحُدوديُّ جُزءًا مِنْ منطقةِ الحُلولِ المُمكِنةِ إذا تضمَّنَتِ المُتباينةُ الرَّمزَ ≤ أوِ الرَّمزَ ≥، عندئذٍ يُرسَمُ المُستقيم الحُدوديُّ مُتَّصِلًا.



وَقَد لا يكونُ المُستقيم الحُدوديُّ جُزءًا مِنْ منطقةِ الحُلولِ المُمكِنةِ إذا تضمَّنَتِ المُتباينةُ الرَّمزَ > أوِ الرَّمزَ <، عندئذٍ يُرسَمُ المُستقيم الحُدوديُّ مُتَقَطِّعًا.



مفهومٌ أساسيٌّ

تمثيلُ المُتبايناتِ الخطيَّةِ بِمُتَغَيِّرَيْنِ بيانيًّا

لتمثيلِ المُتبايناتِ الخطيَّةِ بِمُتَغَيِّرَيْنِ بيانيًّا، أَتَّبِعُ الخُطواتِ الآتيةَ:

الخُطوةُ 1: أرسُمُ مُنحَنى المُعادلةِ المُرافقةِ للمُتباينةِ بأنْ أستبدِلَ بالرَّمزِ (≤، ≥، <، >) رمزَ المُساواةِ (=)؛ حيثُ تُمثِّلُ المُعادلةُ الناتجةُ المُستقيمَ الحُدوديَّ.

الخطوةُ 2: أختارُ نقطةً لا تقعُ علَى المُستقيمِ الحُدوديِّ، ثمَّ أُعَوِّضُها فِي المُتباينةِ الخطيَّةِ لتحديدِ ما إذا كانتْ تمثِّلُ حَلًّا للمُتباينةِ أمْ لا.

الخطوةُ 3: إذا كانتِ النقطةُ تحقِّقُ المُتباينةَ؛ أيْ تنجُمُ عنها نتيجةٌ صحيحةٌ، فَأُظَلِّلُ الجُزءَ مِنَ المُستوى الإحداثيِّ الَّذي تقعُ فيهِ تلكَ النقطةُ، وإلّا أُظَلِّلُ الجُزءَ الآخَرَ الَّذي لا تقعُ فيهِ تلكَ النقطةُ.

مثال 2

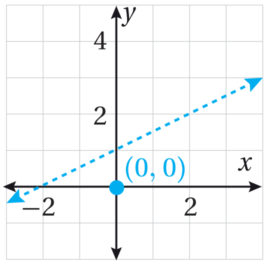
أُمَثِّلُ المُتباينةَ الخطيَّةَ $2y - x < 2$ علَى المُستوى الإحداثيِّ.

الخطوةُ 1: أُمَثِّلُ المُستقيمَ الحُدوديَّ.

أُمَثِّلُ المُستقيمَ الحُدوديَّ $2y - x = 2$، وَأُنْشِئُ جدولَ قِيَمٍ يُبَيِّنُ نقاطَ تقاطعِ المُستقيمِ مَعَ المِحورَيْنِ.

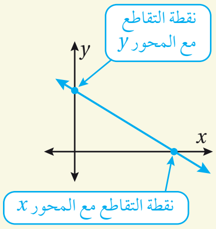
x	0	-2
y	1	0

أُعَيِّنُ النقطتَيْنِ $(0, 1)$ وَ $(-2, 0)$ علَى المُستوى الإحداثيِّ، ثمَّ أرسُمُ مُستقيمًا يَمُرُّ بِهِما. وَبِما أنَّهُ لا توجدُ مُساواةٌ في رَمزِ المُتباينةِ، فَيُرسَمُ مُتَقَطِّعًا، كما فِي الشَّكلِ الآتي.



أتذكَّرُ

بِما أنَّهُ يمكنُ تمثيلُ المُستقيمِ بِنُقْطَتَيْنِ، فإنَّ أسهلَ طريقةٍ لتمثيلِ المُعادلةِ الخطيَّةِ هِيَ إيجادُ نُقْطَتَيْ تقاطعِ المُستقيمِ مَعَ المِحورَيْنِ الإحداثيَّيْنِ، إنْ أمكنَ.



الخطوةُ 2: أُحَدِّدُ منطقةَ الحُلولِ المُمكِنةِ.

أختارُ نقطةً لا تقعُ علَى المُســتقيمِ الحُدوديِّ، مثلَ $(1, -2)$، ثمَّ أتحَقَّقُ إذا كانَ الناتجُ صحيحًا أمْ لا عندَ تعويضِها فِي المُتباينةِ:

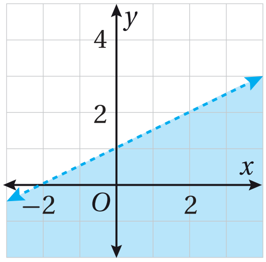
المُتباينةُ الخطيَّةُ $2y - x < 2$

بتعويضِ $x = 1, y = -2$ $2(-2) - 1 \overset{?}{<} 2$

الناتجُ صحيحٌ $-5 < 2$ ✓

الخطوةُ 3: أُظَلِّلُ منطقةَ الحُلولِ المُمكِنةِ.

بِما أنَّ النقطةَ $(1, -2)$ أفضَتْ إلى ناتجٍ صحيحٍ للمُتباينةِ، فَأُظَلِّلُ الجُزءَ مِنَ المُستوى الَّذي تقعُ فيهِ هذهِ النقطةُ، كما فِي الشَّكلِ الآتي.



أتحقَّقُ من فهمي

أُمَثِّلُ المُتباينةَ الخطيَّةَ $-x + 2y > 2$ علَى المُستوى الإحداثيِّ.

مثال 3

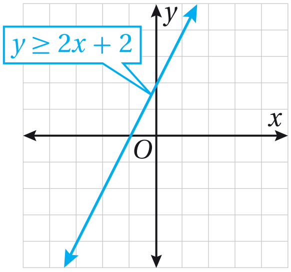
أُمَثِّلُ المُتباينةَ الخطيَّةَ $y \geq 2x + 2$ علَى المُستوى الإحداثيِّ.

الخطوةُ 1: أُمَثِّلُ المُستقيمَ الحُدوديَّ.

أُمَثِّلُ المُســتقيمَ الحُدوديَّ $y = 2x + 2$، وَأُنْشِئُ جدولَ قِيَمٍ يُبيِّنُ نقاطَ تقاطعِ المُستقيمِ مَعَ المِحورَيْنِ.

-1	0	x
0	2	y

أُعَيِّنُ النقطتَيْنِ $(0, 2)$ وَ $(-1, 0)$ علَى المُستوى الإحداثيِّ، ثمَّ أرسُمُ مُستقيمًا يَمُرُّ بِهِما. وَبما أنَّهُ توجدُ مُساواةٌ في رَمزِ المُتبايِنةِ فيُرسَمُ مُتَّصِلًا، كما فِي الشَّكلِ الآتي.



الخطوةُ 2: أُحَدِّدُ منطقةَ الحُلولِ المُمكِنةِ.

أختارُ نقطةً لا تقعُ علَى المُستقيمِ الحُدوديِّ، مثلَ $(0, 0)$، ثمَّ أتحَقَّقُ إذا كانَ الناتجُ صحيحًا أمْ لا عندَ تعويضِها فِي المُتبايِنةِ:

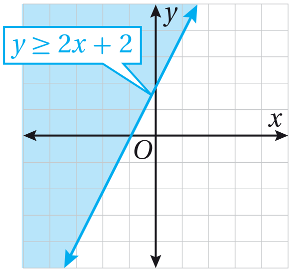
المُتبايِنةُ الخطيَّةُ	$y \geq 2x + 2$
بتعويضِ $x = 0, y = 0$	$0 \overset{?}{\geq} 2(0) + 2$
الناتجُ غيرُ صحيحٍ	$0 \ngeq 2$ ✗

أتعلَّمُ

لسهولةِ إجراءِ الحساباتِ، يُفَضَّلُ اختيارُ النقطةِ $(0, 0)$ لفحصِ المُتبايِنةِ. ولكنْ، إذا وقعتْ علَى المُستقيمِ الحُدوديِّ فيجبُ اختيارُ نقطةٍ غيرِها.

الخطوةُ 3: أُظَلِّلُ منطقةَ الحُلولِ المُمكِنةِ.

بِما أنَّ النقطةَ $(0, 0)$ أفضَتْ إلى ناتجٍ غيرِ صحيحٍ للمُتبايِنةِ، فَأُظَلِّلُ الجُزءَ مِنَ المُستوى الَّذي لا تقعُ فيهِ هذهِ النقطةُ، كما فِي الشَّكلِ الآتي.



أتحقَّقُ من فهمي

أُمَثِّلُ المُتبايِنةَ الخطيَّةَ $-4 \leq y - 2x$ علَى المُستوى الإحداثيِّ.

تمثيلُ المُتبايناتِ الخطيَّةِ بِمُتَغيِّرٍ واحدٍ بيانيًّا

تعلَّمتُ سابقًا تمثيلَ المُعادلةِ الخطيَّةِ بِمُتَغَيِّرٍ واحدٍ على خطِّ الأعدادِ، ويمكنُ أيضًا تمثيلُها علَى المُستوى الإحداثيِّ.

مثال 4

أُمَثِّلُ كُلًّا مِنَ المُتبايناتِ الآتيةِ علَى المُستوى الإحداثيِّ:

① $x > -1$

الخطوةُ 1: أُمَثِّلُ المُستقيمَ الحُدوديَّ.

أُمَثِّلُ المُستقيمَ الحُدوديَّ $x = -1$ علَى المُستوى الإحداثيِّ. وَبِما أنَّهُ لا توجدُ مُساواةٌ في رَمزِ المُتباينةِ فَيُرسَمُ مُتَقَطِّعًا.

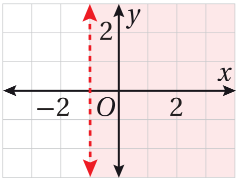
الخطوةُ 2: أُحَدِّدُ منطقةَ الحُلولِ المُمكِنةِ.

أختارُ نقطةً لا تقعُ علَى المُستقيمِ الحُدوديِّ، مثلَ $(0, 0)$، ثمَّ أَتحَقَّقُ إذا كانَ الناتجُ صحيحًا أمْ لا عندَ تعويضِها فِي المُتباينةِ:

المُتباينةُ الخطيَّةُ	$x > -1$
بتعويضِ $x = 0$	$0 \overset{?}{>} -1$
الناتجُ صحيحٌ	$0 > -1$ ✓

الخطوةُ 3: أُظَلِّلُ منطقةَ الحُلولِ المُمكِنةِ.

بِما أنَّ النقطةَ $(0, 0)$ أفضَتْ إلى ناتجٍ صحيحٍ للمُتباينةِ، فَأُظَلِّلُ الجُزءَ مِنَ المُستوى الَّذي تقعُ فيهِ هذهِ النقطةُ، كما فِي الشَّكلِ الآتي.



② $y \le 3$

الخطوةُ 1: أُمَثِّلُ المُستقيمَ الحُدوديَّ.

أُمَثِّلُ المُستقيمَ الحُدوديَّ $y = 3$ علَى المُستوى الإحداثيِّ. وَبِما أنَّه توجدُ مُساواةٌ في رَمزِ المُتبايِنةِ فَيُرسَمُ مُتَّصِلًا.

الخطوةُ 2: أُحَدِّدُ منطقةَ الحُلولِ المُمكِنةِ.

أختارُ نقطةً لا تقعُ علَى المُستقيمِ الحُدوديِّ، مثلَ $(0, 0)$، ثمَّ أتَحَقَّقُ إذا كانَ الناتجُ صحيحًا أمْ لا عندَ تعويضِها فِي المُتبايِنةِ:

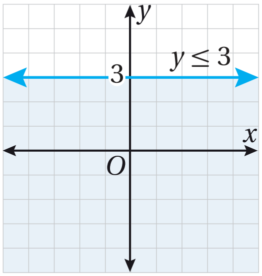
المُتبايِنةُ الخطيَّةُ		$y \le 3$
بتعويضِ $y = 0$		$0 \overset{?}{\le} 3$
الناتجُ صحيحٌ	✓	$0 \le 3$

أتعلَّمُ

عندَ تمثيلِ المُتبايِنةِ الخطيَّةِ بِمُتَغَيِّرٍ واحدٍ علَى المُستوى الإحداثيِّ، يكونُ المُستقيمُ الحُدوديُّ إمّا أُفُقيًّا أوْ عموديًّا.

الخطوةُ 3: أُظَلِّلُ منطقةَ الحُلولِ المُمكِنةِ.

بما أنَّ النقطةَ $(0, 0)$ أفضَتْ إلى ناتجٍ صحيحٍ للمُتبايِنةِ، فَأُظَلِّلُ الجُزءَ مِنَ المُستوى الَّذي تقعُ فيهِ هذهِ النقطةُ، كما فِي الشَّكلِ الآتي.



أتحقَّقُ من فهمي

أُمَثِّلُ كُلًّا مِنَ المُتبايِناتِ الآتيةِ علَى المُستوى الإحداثيِّ:

a) $x \le 4$ **b)** $y > -5$ **c)** $y \ge 0$

للمُتبايناتِ استعمالاتٌ كثيرةٌ فِي المواقفِ العلميَّةِ والحياتيَّةِ؛ إذ تُساعِدُنا علَى اتِّخاذِ القرارِ الأنسبِ المُتعلِّقِ بتحديدِ القِيَمِ المُمكِنةِ ضمنَ شُروطٍ مُحَدَّدَةٍ.

مثال 5 : من الحياة

دراسةٌ: إذا عَلِمتُ أنَّ لدى عمّارٍ 60 دقيقةً علَى الأكثرِ لإنهاءِ الواجبِ المنزليِّ لمادَّتَي الرياضيّاتِ والعلومِ، فأكتبُ مُتباينةً خطيَّةً بِمُتَغيِّرَيْنِ تمثِّلُ عددَ الدقائقِ الَّتي يمكنُ لعمّارٍ قضاءُها في حلِّ كلِّ واجبٍ، ثمَّ أُمَثِّلُها علَى المُستوى الإحداثيِّ.

الخطوةُ 1: أكتبُ المُتباينةَ.

بالكلماتِ: عددُ الدقائقِ اللازمةُ لإنهاءِ الواجبِ المنزليِّ علَى الأكثرِ 60 دقيقةً.

أختارُ مُتَغيِّرًا: لِيَكُنْ x مُمَثِّلًا لعددِ الدقائقِ اللازمةِ لإنهاءِ واجبِ الرياضياتِ، وَ y عددَ الدقائقِ اللازمةِ لإنهاءِ واجبِ العلومِ.

أكتبُ المُتباينةَ: $x + y \le 60$

الخطوةُ 2: أُمَثِّلُ المُتباينةَ بيانيًّا

أُمَثِّلُ المُستقيمَ الحُدوديَّ $x + y = 60$ علَى المُستوى الإحداثيِّ. وبِما أنَّهُ توجدُ مُساواةٌ في رَمزِ المُتباينةِ فيُرسَمُ مُتَّصِلًا.

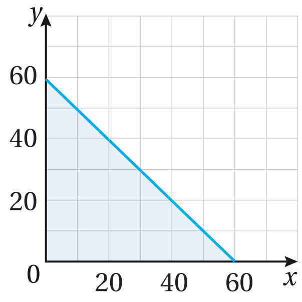
أختارُ نقطةً لا تقعُ علَى المُستقيمِ الحُدوديِّ، مثلَ $(0, 0)$، ثمَّ أتحقَّقُ إذا كانَ الناتجُ صحيحًا أمْ لا عندَ تعويضِها فِي المُتباينةِ:

المُتباينةُ الخطيَّةُ $x + y \le 60$

بتعويضِ $x = 0, y = 0$ $0 + 0 \overset{?}{\le} 60$

الناتجُ صحيحٌ ✓ $0 \le 60$

بِما أنَّ النقطةَ (0, 0) أفضَتْ إلى ناتجٍ صحيحٍ للمُتباينةِ، وَبِما أنَّ قِيَمَ x وَ y يجبُ أنْ تكونَ موجبةً؛ لأنَّها تمثِّلُ الزَّمَنَ، فَأُظَلِّلُ الجُزءَ مِنَ المُستوى الَّذي يقعُ في الرُّبعِ الأوَّلِ، كما في الشَّكلِ المُجاوِرِ.



أُلاحِظُ أيضًا أنَّ أيَّ نقطةٍ يقعُ إحداثيُّها علَى المُستقيمِ الحُدوديِّ، أوْ ضمنَ المنطقةِ المُظَلَّلَةِ الَّتي تظهرُ كَمُثَلَّثٍ، تُعَدُّ حَلًّا. فمثلًا، النقطةُ (20, 40) تُمثِّلُ حَلًّا للمُتباينةِ، وَ (30, 30) تُمثِّلُ أيضًا حَلًّا.

أتحقَّق من فهمي

نِجارةٌ: إذا عَلِمتُ أنَّ نجارًا يريدُ شِراءَ نوعَيْنِ مِنَ الخشبِ، بحيثُ لا يزيدُ ثمنُهُما الكليُّ على 72 دينارًا، وَوُجِدَ أنَّ ثمنَ المترِ الطوليِّ مِنَ النَّوعِ الأوَّلِ 4 دنانيرَ، وَمِنَ النَّوعِ الثاني 6 دنانيرَ، فأكتبُ مُتباينةً خطيَّةً بِمُتَغَيِّرَيْنِ تمثِّلُ كميَّةَ الخشبِ الَّتي يمكنُ للنَّجارِ شِراؤها مِنْ كلِّ نوعٍ، ثمَّ أُمَثِّلُها علَى المُستوى الإحداثيِّ.

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أُحَدِّدُ إذا كانَ كلُّ زوجٍ مُرَتَّبٍ ممّا يأتي يمثِّلُ حَلًّا للمُتباينةِ: $x + 3y < 6$

① (0, 1)

② (−2, 4)

③ (8, −1)

أُحَدِّدُ إذا كانَ كلُّ زوجٍ مُرَتَّبٍ ممّا يأتي يمثِّلُ حَلًّا للمُتباينةِ: $-3x + 4y \geq 12$

④ (−5, 3)

⑤ (0, 2)

⑥ (3, 7)

أُمَثِّلُ كُلًّا مِنَ المُتبايناتِ الآتيةِ علَى المُستوى الإحداثيِّ:

⑦ $y \leq 3 - 2x$

⑧ $x + y < 11$

⑨ $x - 2y < 0$

⑩ $4y - 8 \geq 0$

⑪ $3x - y \leq 6$

⑫ $2x + 5y < -10$

⑬ $-4x + 6y > 24$

⑭ $y < 3x + 3$

⑮ $-2x \geq 10$

⑯ $x < 6$

⑰ $y > -2$

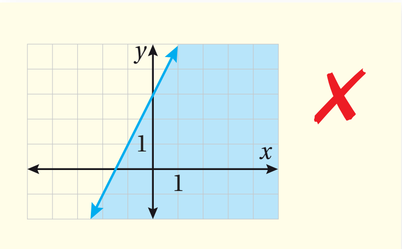
⑱ $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} < 1$

⑲ **حقائبُ:** يصنعُ جمالٌ حقائبَ نسائيَّةً كبيرةً وصغيرةً لبيعِها في معرضٍ للحِرَفِ اليدويَّةِ. إذا كانَ يحتاجُ إلى 3 أيامٍ لصنعِ الحقيبةِ الصغيرةِ، وإلى 5 أيامٍ لصنعِ الحقيبةِ الكبيرةِ، فأكتبُ مُتباينةً خطيَّةً بِمُتغيِّرَيْنِ تمثِّلُ عددَ الحقائبِ الَّتي يمكنُ لَهُ صنعُها مِنْ كلِّ نوعٍ إذا كانَ لديهِ 30 يومًا كَحَدٍّ أقصى عَنْ يومِ افتتاحِ المعرضِ، ثمَّ أُمَثِّلُها علَى المُستوى الإحداثيِّ.

⑳ **تَسَوُّقٌ:** تريدُ ساميةُ شِراءَ العِنَبِ وَالتُّفّاحِ، بحيثُ لا يزيدُ المبلغُ الَّذي تدفَعُهُ ثمنًا لِكِلا النَّوعَيْنِ على 6 دنانيرَ. إذا كانَ ثمنُ الكيلوغرامِ الواحدِ مِنَ العِنَبِ 1.5 دينارًا، وثمنُ الكيلوغرامِ الواحدِ مِنَ التُّفّاحِ 1 دينارًا، فأكتبُ مُتباينةً خطيَّةً بِمُتغيِّرَيْنِ تمثِّلُ عددَ الكيلوغراماتِ الَّتي يمكنُ لساميةَ أنْ تشترِيَها مِنْ كلِّ نوعٍ، ثمَّ أُمَثِّلُها علَى المُستوى الإحداثيِّ.

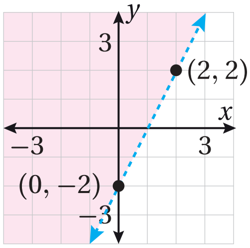
مهارات التفكير العليا

㉑ **أكتشفُ الخطأَ:** مَثَّلَ رامي المُتباينةَ $y < 2x + 3$، كما هُوَ مُبيَّنٌ فِي الشَّكلِ المُجاوِرِ. أكتشفُ الخطأَ الَّذي وقعَ فيه رامي، وَأُصَحِّحُهُ.



㉒ **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أكتبُ مُتباينةً خطيَّةً بِمُتغيِّرَيْنِ، بحيثُ تمثِّلُ النقطتَيْنِ $(-1, 3)$ وَ $(1, 6)$ حَلًّا لها، في حينِ لا تمثِّلُ النقطةُ $(4, 0)$ حَلًّا.

㉓ **تبريرٌ:** أكتبُ المُتباينةَ الخطيَّةَ المُعطى تمثيلُها البيانيُّ فِي الشَّكلِ المُجاوِرِ، مُبرِّرًا إجابتي.



اختبار نهاية الوحدة

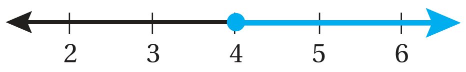
أختارُ رمزَ الإجابةِ الصَّحيحةِ لكلٍّ ممّا يأتي:

1 حلُّ المُتباينةِ $-9x + 17 \ge -64$، هُوَ:

a) $\{x \mid x \le 9\}$ **b)** $\{x \mid x \ge 9\}$

c) $\{x \mid x \le -9\}$ **d)** $\{x \mid x \ge -9\}$

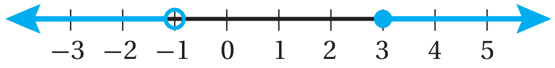
2 الفترةُ الَّتي تُعبِّرُ عَنِ التمثيلِ البيانيِّ الآتي، هِيَ:



a) $(4, \infty)$ **b)** $[4, \infty)$

c) $(-\infty, 4)$ **d)** $(-\infty, 4]$

3 المُتباينةُ المُرَكَّبَةُ الَّتي تُعبِّرُ عَـنِ التمثيلِ البيانيِّ الآتي، هِيَ:



a) $-1 < x < 3$ **b)** $x \le -1$ or $x > 3$

c) $x < -1$ or $x \ge 3$ **d)** $x > -1$ or $x \le 3$

4 حلُّ المُتباينةِ $-7 < x + 2 < 4$، هُوَ:

a) $(-5, 6)$ **b)** $(-9, 6)$

c) $(-5, 2)$ **d)** $(-9, 2)$

5 مجموعةُ حلِّ المُعادلةِ $|x + 5| = 2$، هِيَ:

a) $\{-3, 3\}$ **b)** $\{-3, -7\}$

c) $\{-2, 2\}$ **d)** $\{3, 7\}$

أكتبُ كلَّ مجموعةٍ ممّا يأتي بطريقةِ الصِّفةِ المُميِّزةِ:

6 $\{11, 12, 13, 14, \ldots\}$

7 $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

8 $\{3, 6, 9, 12\}$

9 $\{3, 2, 1\}$

أُعبِّرُ عَنْ كلٍّ مِنَ المجموعاتِ الآتيةِ، مُستعملًا طريقةَ سردِ العناصرِ وطريقةَ الصِّفةِ المُميِّزةِ:

10 الأعدادُ الزوجيَّةُ الَّتي تزيدُ على 7 وتقلُّ عَنْ 20

11 الأعدادُ الكليَّةُ الَّتي تقلُّ عَنْ 4

أكتبُ مُتباينةً تمثِّلُ كلَّ جملةٍ ممّا يأتي، ثمَّ أُمثِّلُها على خطِّ الأعدادِ:

12 عددٌ علَى الأكثرِ -3 أوْ علَى الأقلِّ 5

13 عددٌ علَى الأقلِّ 2 وعلَى الأكثرِ 9

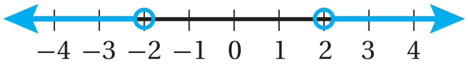
14 عددٌ يقعُ بينَ -4 وَ 6

15 عددٌ أقلُّ مِنْ 100 أوْ أكبرُ مِنْ 300

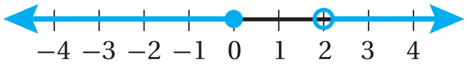
أكتبُ مُتباينةً مُركَّبَةً تُعبِّرُ عَنْ كلِّ تمثيلٍ ممّا يأتي، ثمَّ أُعبِّرُ عنها برمزِ الفترةِ:

16

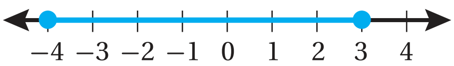
17



18



19



اختبار نهاية الوحدة

أُحَدِّدُ إذا كانَ كلُّ زوجٍ مُرتَّبٍ ممّا يأتي يمثِّلُ حَلًّا للمُتباينةِ:

$$2x + y > -3$$

20 $(2, -2)$

21 $(1, -3)$

22 $(-5, 4)$

23 $(2, 0)$

أَجِدُ مجموعةَ حَلِّ كُلِّ مُتباينـةٍ ممّا يأتي، ثمَّ أُمَثِّلُها على خطِّ الأعدادِ:

24 $-2 \le x - 7 \le 1$

25 $-2 < -2n + 1 < 7$

26 $-8 < \frac{2}{3}x - 4 < 10$

27 $3x + 2 < -10$ or $2x - 4 > -4$

28 $x - 1 \le 5$ or $x + 3 \ge 10$

29 $4x - 3 > 11$ or $4x - 3 \le -11$

أَحُلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ والمُتبايناتِ الآتيةِ:

30 $3 - |5x + 3| > 3$

31 $7|x + 1| -3 \le 11$

32 $-4|8 - x| + 2 > -14$

33 $|x + 5| = 6.5$

34 $|7x + 3| + 2 = 33$

35 $|x - \frac{1}{2}| = \frac{5}{2}$

أُمَثِّلُ كُلًّا مِنَ المُتبايناتِ الآتيةِ علَى المُستوى الإحداثيِّ:

36 $y \le -2x + 1$

37 $x < -4$

38 $y \ge x - 1$

39 $y > 5x - 5$

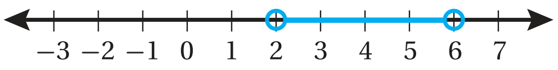
40 $4x - y < 2$

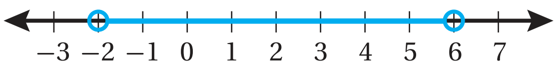
41 **نقلٌ:** يمكنُ لشـاحنةٍ نقلُ 3500 kg مِنَ البضائعِ كَحَدٍّ أقصى. إذا كانتِ الشـاحنةُ تنقلُ ثلّاجاتٍ كتلةُ الواحدةِ منها 125 kg، وغسّـالاتٍ كتلةُ الواحدةِ منها 100 kg، فأكتبُ مُتباينـةً خطيَّةً بِمُتَغَيِّرَيْنِ تمثِّـلُ عددَ الثلّاجاتِ والغسّـالاتِ الَّتي يمكنُ لهـا نقلُها، ثـمَّ أُمَثِّلُها علَى المُستوى الإحداثيِّ.

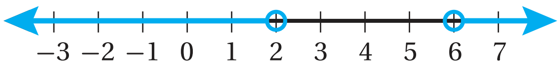
42 **كـرةُ سَـلَّةٍ:** إذا كانَ المحيطُ المثاليُّ لكرةِ السَّلَّةِ النسائيَّةِ 28.75 in، وكانَ مسموحًا أنْ يزيدَ على ذلكَ أوْ يَنْقُصَ عنهُ كَحَدٍّ أقصى بِمِقـدارِ 0.25 in، فأكتبُ مُتباينةَ قيمةٍ مُطلقةٍ وَأَحُلُّها لإيجادِ مدى محيطِ الكرةِ المسموحِ بِهِ.

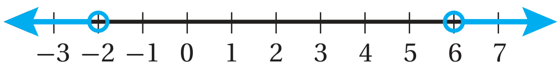
تدريب على الاختبارات الدولية

43 التمثيـلُ البيانيُّ الَّذي يمثِّـلُ مجموعةَ حَـلِّ المُتباينةِ $|x - 4| > 2$، هُوَ:

a)


b)


c)


d)


44 الـزَّوجُ المُرتَّـبُ الَّـذي لا يمثِّـلُ حَـلًّا للمُتباينـةِ $3x - 5y < 30$، هُوَ:

a) $(1, -7)$

b) $(-1, 7)$

c) $(0, 0)$

d) $(-5, -5)$

الوحدة
2

العلاقاتُ والاقتراناتُ
Relations and Functions

ما أهميَّةُ هذهِ الوحدةِ؟

يُعَدُّ الاقترانُ التربيعيُّ أحدَ أكثرِ الاقتراناتِ شُهرةً واستخدامًا في الرياضياتِ؛ ولذلك خُصِّصَتْ هذه الوحدةُ لتقديمِ خصائصِ هذا الاقترانِ الجبريّةِ والبيانيّةِ وبعضِ استعمالاتِهِ الحياتيّةِ، مثلِ تصميمِ الجُسورِ والمباني والأشكالِ الجميلةِ، التي تنتجُ عندَ إطلاقِ الألعابِ الناريّةِ.

تعلّمتُ سابقًا:

- ✓ تمثيلَ الاقتراناتِ الخطيّةِ بيانيًّا.
- ✓ حلَّ المعادلاتِ الخطيّةِ بمتغيرٍ واحدٍ.
- ✓ إجراءَ تحويلاتٍ هندسيّةٍ لأشكالٍ ثنائيّةِ البُعدِ فِي المُستوى الإحداثيِّ.
- ✓ تفسيرَ التمثيلاتِ البيانيّةِ في مواقفَ حياتيّةٍ.
- ✓ نمذجةَ ظواهرَ ومواقفَ حياتيّةً هندسيًّا على مفهومِ الاقترانِ الخطيِّ.

سأتعلَّمُ في هذهِ الوحدةِ:

- تحديدَ ما إذا كانتِ العلاقةُ اقترانًا أمْ لا.
- تفسيرَ التمثيلاتِ البيانيّةِ في مواقفَ حياتيّةٍ.
- تعرُّفَ الاقترانِ التربيعيِّ وخصائصِهِ، وتمثيلَهُ بيانيًّا فِي المُستوى الإحداثيِّ.
- تمثيلَ مُنحنياتِ الاقتراناتِ التربيعيّةِ الناتجةِ منْ تطبيقِ تحويلٍ هندسيٍّ أوْ أكثرَ على مُنحنى الاقترانِ الرئيسِ.

أستعمل تدريبات (أستعد لدراسة الوحدة) في الصفحات (6 و 7 و 8) من كتاب التمارين؛ لمراجعة هذه الموضوعات قبل البدء بدراسة الوحدة.

الدرس
1

الاقتراناتُ
Functions

فكرة الدرس

- تحديدُ ما إذا كانتِ العلاقةُ اقترانًا أمْ لا.
- تحديدُ مجالِ الاقترانِ ومداهُ.

المصطلحات علاقةٌ، مجالٌ، مدًى، الاقتــرانُ، اقترانٌ مُتَّصِلٌ، اقتــرانٌ مُنفَصِلٌ، اختبارُ الخطِّ الرأســيِّ، الاقترانُ الخطيُّ، الاقترانُ غيرُ الخطيِّ.

مسألة اليوم يمثِّلُ الاقترانُ $d(t) = 300000t$ المســافةَ d بالكيلومترِ، التي يقطعُها الضَّوءُ بعدَ t ثانيةً.

1) أَجِدُ المسافةَ التي يقطعُها الضَّوءُ بعدَ 15 s

2) أَجِدُ عددَ الثواني اللازمةِ ليقطعَ الضَّوءُ 12 مليونَ كيلومترٍ.

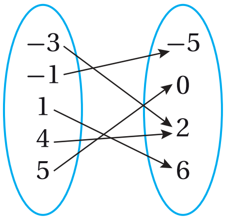
العلاقةُ والاقترانُ

تُســمّى مجموعةُ الأزواجِ المُرَتَّبَةِ التي تكوِّنُها المُدخلاتُ والمُخرجاتُ **علاقةً** (relation)؛ حيثُ الإحداثيُّ x لــلأزواجِ المُرَتَّبَةِ هوَ المُدخلاتُ، والإحداثــيُّ y هوَ المُخرجاتُ، ويمكنُ التعبيرُ عنِ العلاقةِ بطرائقَ مختلفةٍ، منها: الأزواجُ المُرَتَّبَةُ، التمثيلُ البيانيُّ، جدولُ المُدخلاتِ والمُخرجاتِ، المُخَطَّطُ السهميُّ. فمثلًا، تمثِّلُ مجموعةُ الأزواجِ المُرَتَّبَةِ الآتيةِ علاقةً:

$$\{(1, 6), (-3, 2), (5, 0), (-1, -5), (4, 2)\}$$

ويمكنُ التعبيرُ عنْ هذهِ العلاقةِ بطرائقَ مختلفةٍ، كما يأتي:

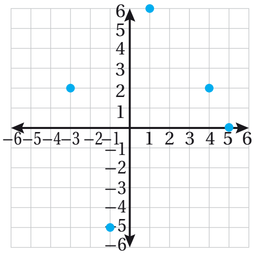
مُخَطَّطٌ سهميٌّ



جدولُ مُدخلاتٍ وَمُخرجاتٍ

y	x
6	1
2	−3
0	5
−5	−1
2	4

تمثيلٌ بيانيٌّ



تُسَـمّى مجموعةُ مُدخلاتِ العلاقةِ **المجـالَ** (domain)، أمّا مجموعـةُ مُخرجاتِ العلاقةِ فَتُسَـمَّى **المَدى** (range)، وَتُسَمَّى العلاقةُ التي تربطُ كلَّ عنصرٍ في مجالِها بعنصرٍ واحدٍ فقط منَ المَدى **اقترانًا** (function).

مثال 1

أُحَدِّدُ مجالَ كلِّ علاقةٍ ممّا يأتي وَمَداها، ثمَّ أُحَدِّدُ ما إذا كانتْ تمثِّلُ اقترانًا أمْ لا:

1 $\{(0, 1), (2, 4), (3, 7), (5, 4)\}$

المجالُ: $\{0, 2, 3, 5\}$ **المَدى:** $\{1, 4, 7\}$

أُلاحِظُ ارتباطَ كلِّ عنصرٍ فِي المجالِ بعنصرٍ واحدٍ فِي المَدى. إذنْ، تمثِّلُ هذهِ العلاقةُ اقترانًا.

أتعلَّمُ

يمكـنُ أنْ يرتبطَ أكثرُ من عنصرٍ في مجالِ الاقترانِ بعنصرٍ واحدٍ في مداهُ.

2 $\{(-4, 2), (6, -1), (0, 0), (-4, 0)\}$

المجالُ: $\{-4, 6, 0\}$ **المَدى:** $\{2, -1, 0\}$

أُلاحِظُ ارتباطَ العنصرِ -4 فِي المجالِ بالعنصرينِ 2 وَ 4 فِي المَدى. إذنْ، لا تمثِّلُ هذهِ العلاقةُ اقترانًا.

أتعلَّمُ

عنـدَ كتابـةِ المجموعةِ بطريقـةِ سـردِ العناصرِ، أكتبُ العنصرَ المُكرَّرَ مَرَّةً واحدةً. علمًـا أنَّ ترتيبَ العناصرِ ليسَ مُهمًّا.

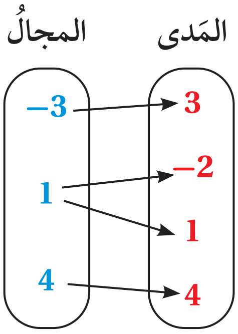
3

x	5	3	2	0	-4	-6
y	1	3	1	3	-2	2

المجالُ: $\{5, 3, 2, 0, -4, -6\}$ **المَدى:** $\{1, 3, -2, 2\}$

أُلاحِظُ ارتباطَ كلِّ عنصرٍ فِي المجالِ بعنصرٍ واحدٍ فِي المَدى. إذنْ، تمثِّلُ هذهِ العلاقةُ اقترانًا.

4



المجالُ: $\{-3, 1, 4\}$ **المَدى:** $\{3, -2, 1, 4\}$

أُلاحِظُ ارتبـاطَ العنصرِ 1 فِي المجالِ بالعنصرينِ -2 وَ 1 فِي المَدى. إذنْ، لا تمثِّلُ هذهِ العلاقةُ اقترانًا.

أتذكَّرُ

يمكـنُ تمثيـلُ العلاقـةِ بِمُخَطَّطٍ سهميٍّ.

أتحقَّق من فهمي

أُحَدِّدُ مجالَ كلِّ علاقةٍ ممّا يأتي وَمَداهُ، ثمَّ أُحَدِّدُ ما إذا كانتْ تمثِّلُ اقترانًا أمْ لا:

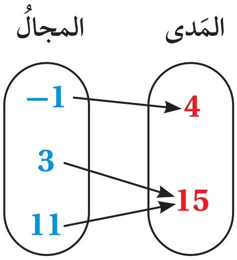
a) $\{(-2, 5), (0, 2), (4, 5), (5, 6)\}$

b) $\{(6, 5), (4, 3), (6, 4), (5, 8)\}$

c)

x	5	2	-7	2	5
y	4	8	9	12	14

d)



الاقترانُ المُتَّصِلُ والمُنفَصِل

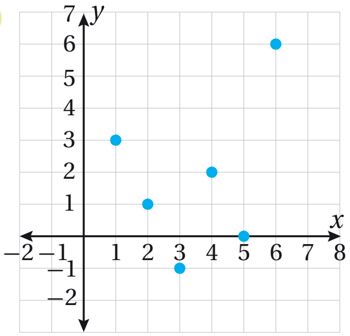
يُسَمّى الاقترانُ الذي يمكنُ تمثيلُهُ فِي المُستوى الإحداثيِّ بنقاطٍ غيرِ مُتَّصِلَةٍ **اقترانًا مُنفَصِلًا** (discrete function)، أمّا الاقترانُ الذي يُمَثَّلُ بخطٍّ أوْ مُنحنى دونَ انقطاعٍ فَيُسَمّى **اقترانًا مُتَّصِلًا** (continuous function).

يمكنُ تحديدُ مجالِ الاقتراناتِ المُنفَصِلَةِ وَالمُتَّصِلَةِ وَمَداها منْ خلالِ تمثيلِها بيانيًّا، كما فِي المثالِ الآتي:

مثال 2

أُحَدِّدُ ما إذا كانَ كلُّ اقترانٍ ممّا يأتي مُنفَصِلًا أمْ مُتَّصِلًا، ثمَّ أُحَدِّدُ مجالَهُ وَمَداهُ:

1



الاقترانُ المُمَثَّلُ فِي الشكلِ المُجاورِ مُنفَصِلٌ؛ لأنَّ تمثيلَهُ فِي المُستوى الإحداثيِّ على شَكلِ نقاطٍ غيرِ مُتَّصِلَةٍ.

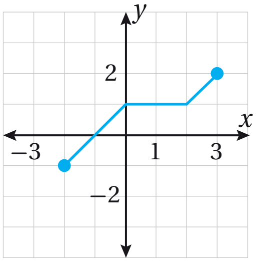
لتحديدِ مجالِ الاقترانِ وَمَداهُ، أكتبُ الأزواجَ المُرَتَّبَةَ وَأُحَدِّدُ مِنهَا المجالَ وَالمَدى.

الأزواجُ المُرَتَّبَةُ: $\{(1, 3), (2, 1), (3, -1), (4, 2), (5, 0), (6, 6)\}$

المجالُ: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

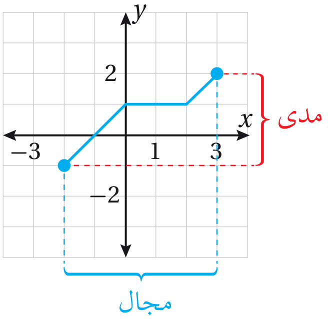
المَدى: $\{3, 1, -1, 2, 0, 6\}$

2



الاقترانُ المُمَثَّلُ فِي الشكلِ المُجاورِ مُتَّصِلٌ؛ لأنَّ تمثيلَهُ فِي المُستوى الإحداثيِّ على شكلِ قطعٍ مستقيمةٍ دونَ انقطاعٍ.

أَستعمِلُ التمثيلَ البيانيَّ لتحديدِ قِيَمِ x وَقِيَمِ y، التي تمثِّلُ المجالَ وَالمَدى كالآتي:

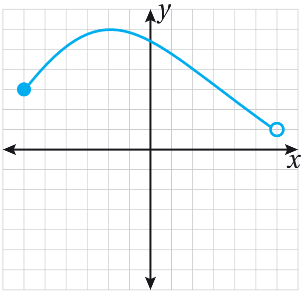


المجالُ: $\{x \mid -2 \le x \le 3\}$ أو $[-2, 3]$ **المَدى:** $\{y \mid -1 \le y \le 2\}$ أو $[-1, 2]$

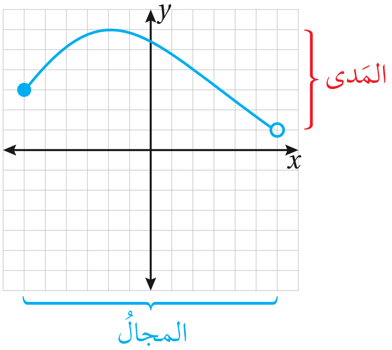
أتعلَّمُ

يُكتَبُ مجالُ الاقترانِ المُنفصِلِ وَمَداهُ على شكلِ مجموعةٍ مِنَ العناصرِ المُنفَصِلَةِ، أمّا مجالُ الاقترانِ المُتَّصِلِ وَمَداهُ فيُكتَبُ على شكلِ فتراتٍ أَوْ مُتبايناتٍ.

3



الاقترانُ المُمَثَّلُ فِي الشكلِ المُجاورِ مُتَّصِلٌ؛ لأنَّ تمثيلَهُ فِي المُستوى الإحداثيِّ على شكلِ مُنحنى ليسَ فيهِ انقطاعٌ. أستعمِلُ التمثيلَ البيانيَّ لتحديدِ قِيَمِ x وَقِيَمِ y، التي تُمَثِّلُ المجالَ والمَدى كالآتي:

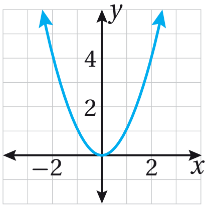


المجالُ: $\{x \mid -6 \le x < 6\}$ أو $[-6, 6)$ **المَدى:** $\{y \mid 1 < y \le 6\}$ أو $(1, 6]$

أتعلَّمُ

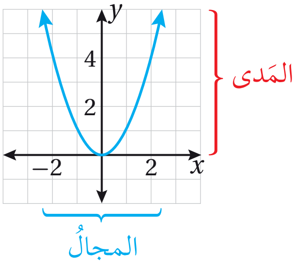
تعني الدائرةُ المفتوحةُ فِي التمثيلِ البيانيِّ أنَّ الإحداثيَّ x للزوجِ المُرَتَّبِ لا ينتمي إلى مجالِ الاقترانِ، والإحداثيَّ y لا ينتمي إلى مَدى الاقترانِ، وَيُعَبَّرُ عنْ ذلكَ عندَ كتابةِ الفتراتِ باستعمالِ قوسٍ.

4



الاقترانُ المُمَثَّلُ فِي الشكلِ المُجاورِ مُتَّصِلٌ؛ لأنَّ تمثيلَهُ فِي المُستوى الإحداثيِّ على شكلِ مُنحنى ليسَ فيهِ انقطاعٌ.

أستعمِلُ التمثيلَ البيانيَّ لتحديدِ قِيَمِ x وَقِيَمِ y، التي تُمَثِّلُ المجالَ والمَدى كالآتي:



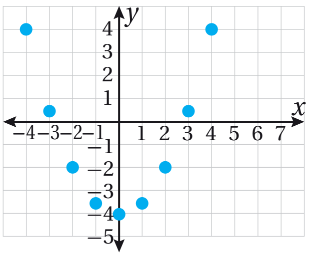
يَدُلُّ وُجودُ رأسِ السَّهمِ فِي التمثيلِ البيانيِّ على أنَّ الأعدادَ تذهبُ إلى المالانهايةِ. وعليهِ، فيمكنُ كتابةُ مجالِ الاقترانِ وَمَداهُ عَلَى النَّحوِ الآتي:

المجالُ: $\{x \mid -\infty < x < \infty\}$ أو $(-\infty, \infty)$ **المَدى:** $\{y \mid y \geq 0\}$ أو $[0, \infty)$

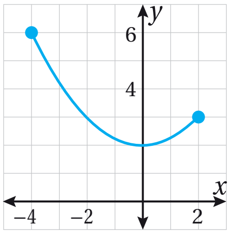
أتحقَّقُ من فهمي

أُحَدِّدُ ما إذا كانَ كلُّ اقترانٍ ممّا يأتي مُنفَصِلًا أمْ مُتَّصِلًا، ثمَّ أُحَدِّدُ مجالَهُ وَمَداهُ:

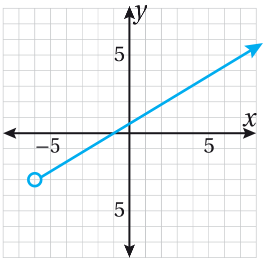
a)



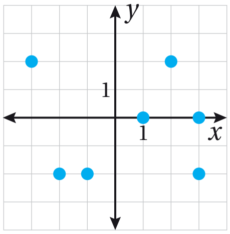
b)



c)



d)



اختبارُ الخطِّ الرأسيِّ

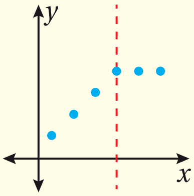
يُمكنُني اســتعمالُ **اختبارِ الخطِّ الرأســيِّ** (vertical line test) لتحديدِ ما إذا كانَتِ العلاقةُ المُمَثَّلَةُ بيانيًّا تُمَثِّلُ اقترانًا أمْ لا.

مفهومٌ أساسيٌّ **اختبارُ الخطِّ الرأسيِّ**

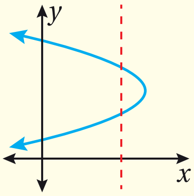
بالكلماتِ: تُعَدُّ العلاقةُ المُمَثَّلَةُ بيانيًّا اقترانًا إذا لم يَقطَعْ أيَّ خطٍّ رأسيٍّ تمثيلَها البيانيَّ في أكثرِ مِنْ نقطةٍ واحدةٍ.

أمثلةٌ:

اقترانٌ



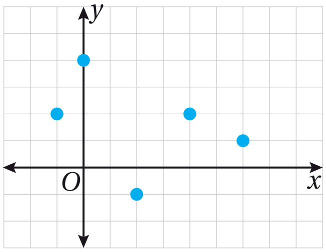
ليسَتِ اقترانًا



مثال 3

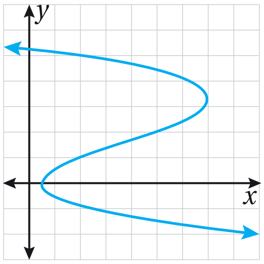
أُحَدِّدُ ما إذا كانَتِ العلاقةُ المُمَثَّلَةُ بيانيًّا في كلٍّ ممّا يأتي تُمَثِّلُ اقترانًا أمْ لا، مُبَرِّرًا إجابتي:

1



تُمَثِّلُ العلاقةُ المُمَثَّلَةُ فِي الشــكلِ المُجاورِ اقترانًا؛ لأنَّهُ لا يوجدُ خطٌّ رأســيٌّ يَمُرُّ بأكثرِ مِنْ نقطةٍ واحدةٍ في تمثيلِها البيانيِّ.

2

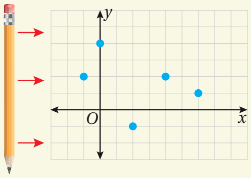


لا تُمَثِّـلُ العلاقـةُ المُعطى تمثيلُهـا البيانـيُّ فِـي الشـكلِ المُجـاورِ اقترانًـا؛ لأنَّها تفشـلُ فِـي اختبارِ الخطِّ الرأسـيِّ. فمثـلًا، يوجـدُ مسـتقيمٌ رأسـيٌّ يقطـعُ التمثيـلَ البيانـيَّ في ثـلاثِ نقـاطٍ عنـدما $x = 2$

وهذا يعني أنَّ القيمةَ $x = 2$ فِي المجالِ ترتبطُ بثلاثِ قِيَمٍ مختلفةٍ لِـ y فِي المَدى.

أتعلَّمُ

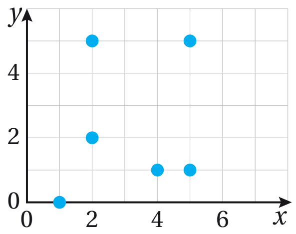
يُمكنُني اســتعمالُ قلمي لإجــراءِ اختبــارِ الخطِّ الرأســيِّ؛ إذْ أَضَعُهُ رأسيًّا يســارَ التمثيــلِ البيانيِّ، ثمَّ أبدأُ بتحريكِــهِ باتجاهِ اليمينِ، فإذا استمرَّ القلمُ بقطعِ التمثيــلِ البيانيِّ في نقطــةٍ واحدةٍ فقــطْ فإنَّ العلاقةَ تُمَثِّلُ اقترانًا.



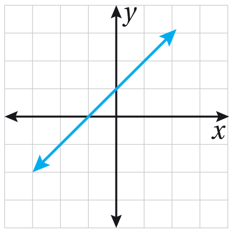
أتحقَّق من فهمي

أُحَدِّدُ ما إذا كانَتِ العلاقةُ المُمَثَّلَةُ بيانيًّا في كلٍّ ممّا يأتي تُمَثِّلُ اقترانًا أمْ لا، مُبَرِّرًا إجابتي:

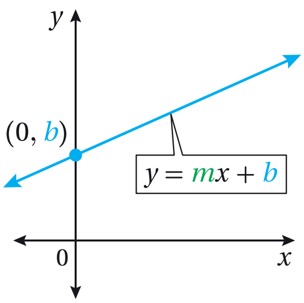
a)



b)



رمزُ الاقترانِ والاقترانُ الخطيُّ



يُبَيِّنُ الشكلُ المُجاورُ التمثيلَ البيانيَّ لِمُعادلةٍ خطيَّةٍ بمتغيِّرَيْنِ، التي تعلَّمتُ سابقًا كتابَتَها باستعمالِ صيغةِ الميلِ والمقطعِ عَلَى الصورةِ: $y = mx + b$؛ حيثُ m ميلُ المُستقيمِ وَb مقطعُهُ y، وبما أنَّ تمثيلَ هذهِ المُعادلةِ البيانيَّ يجتازُ اختبارَ الخطِّ الأفقيِّ فإنَّها تُعَدُّ اقترانًا، وَيُسَمَّى **اقترانًا خطيًّا** (linear function).

يمكنُ أيضًا كتابةُ قاعدةِ الاقترانِ الخطيِّ باستعمالِ رمزِ الاقترانِ $f(x)$ عَلَى الصورةِ الآتيةِ:

$$f(x) = mx + b$$

وَتُمَثِّلُ قِيَمُ x عناصرَ مجالِ الاقترانِ f، أمّا قِيَمُ $f(x)$ فَتُمَثِّلُ عناصرَ مَداهُ.

$$\overset{\text{المَدى}}{\overset{\downarrow}{f(x)}} = \overset{\text{المجالُ}}{\overset{\downarrow}{4x}} + 10$$

لغةُ الرِّياضياتِ

يُقرَأُ الرَّمزُ $f(x)$:

f of x

مثال 4

إذا كانَ $f(x) = 2x + 6$، فَأُجيبُ عَنِ الأسئلةِ الآتيةِ تِباعًا:

1 أَجِدُ $f(3)$

الاقترانُ المُعطى	$f(x) = 2x + 6$
بتعويضِ $x = 3$	$f(3) = 2(3) + 6$
بالتبسيطِ	$= 12$

أتعلَّمُ

يمكنُ استعمالُ حروفٍ أُخرى للدَّلالةِ عَلَى الاقترانِ غيرِ حرفِ f، مثل: g أوْ h.

2 أَجِدُ $f(-4) + 10$

$f(-4) + 10 = (2(-4) + 6) + 10$ بتعويضِ $x = -4$

$= -2 + 10$ بالتبسيطِ

$= 8$ بالتبسيطِ

3 أَجِدُ قيمةَ x، التي تجعلُ $f(x) = -10$

$f(x) = 2x + 6$ الاقترانُ المُعطى

$-10 = 2x + 6$ بتعويضِ $f(x) = -10$

$-16 = 2x$ بطرحِ 6 مِنْ طَرَفَي المُعادلةِ

$x = -8$ بقسمةِ طَرَفَي المُعادلةِ على -2

إذنْ، عندما $x = -8$، فإنَّ $f(x) = -10$

أتحقَّق من فهمي

إذا كانَ $g(x) = 10 - x$، فَأُجيبُ عَنِ الأسئلةِ الآتيةِ تِباعًا:

a) أَجِدُ $g(-5)$

b) أَجِدُ $g(3) + 6$

c) أَجِدُ قيمةَ x، التي تجعلُ $g(x) = -35$

للاقتراناتِ الخطيَّةِ الكثيرُ مِنَ التطبيقاتِ الحياتيَّةِ.

مثال 5 : من الحياة

درجاتُ حرارةٍ: يُمَثِّلُ الاقترانُ $t(m) = 19m + 65$ درجةَ الحرارةِ t بالفهرنهايتِ لفرنٍ بعدَ تسخينِهِ مُدَّةَ m دقيقةٍ.

1 أَجِدُ درجةَ حرارةِ الفرنِ بعدَ 10 دقائقَ.

أَجِدُ $t(1)$:

$t(m) = 19m + 65$ الاقترانُ المُعطى

$t(10) = 19(10) + 65$ بتعويضِ $m = 10$

$= 255$ بالتبسيطِ

إذنْ، درجةُ حرارةِ الفرنِ بعدَ 10 دقائقَ مِنْ بَدءِ تسخينِهِ 255 °F

2 **إذا كانتْ أقصى درجةِ حرارةِ للفرنِ 350 °F، فَأَجِدُ مجالَ الاقترانِ وَمَداهُ.**

الاقترانُ المُعطى	$t(m) = 19m + 65$
بتعويضِ $t(m) = 350$	$350 = 19m + 65$
بطرحِ 65 مِنْ طَرَفَي المُعادلةِ	$285 = 19m$
بقسمةِ طَرَفَيِ المُعادلةِ على 19	$m = 15$

إذنْ، أكبرُ قيمةٍ للمجالِ 15. وعليهِ، فإنَّ مجالَ الاقترانِ هُوَ $[0, 15]$.

لإيجادِ مَدى الاقترانِ أُعَوِّضُ $m = 0$ فِي الاقترانِ لينتجَ $t(0) = 18$. وعليهِ، فإنَّ مَدى الاقترانِ هُوَ $[18, 350]$.

أتعلَّمُ

يمكنُ إيجادُ مَدى الاقترانِ الخطيِّ بتعويضِ أقلِّ قيمةٍ وأعلى قيمةٍ في المجالِ.

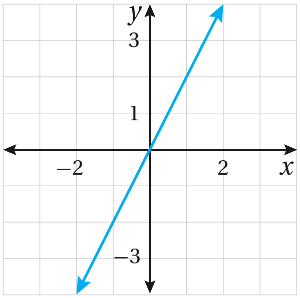
أتحقَّق من فهمي

يُمَثِّلُ الاقترانُ $d(x) = 12x$ المسافةَ d بالكيلومترِ التي تقطعُها سيّارة. باستعمالِ x لترٍ مِنَ الوقودِ، أَجِدُ مجالَ الاقترانِ وَمَداهُ إذا كانَ الحَدُّ الأقصى لِسَعَةِ خَزّانِ السيّارةِ مِنَ الوقودِ 40 L

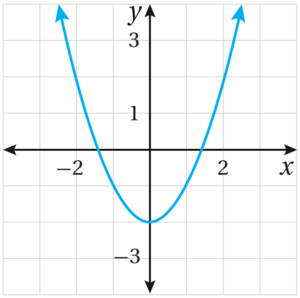
الاقتراناتُ غيرُ الخطيَّةِ

الاقترانُ غيرُ الخطيِّ (nonlinear function) اقترانٌ أُسُّ المُتَغَيِّرِ فيهِ لا يُساوِي العددَ 1، وتمثيلُهُ البيانيُّ ليسَ خطًّا مستقيمًا.

اقترانٌ خطيٌّ



اقترانٌ غيرُ خطيٍّ



ويمكنُ إيجادُ قيمةِ الاقترانِ غيرِ الخطيِّ عندَ قيمةٍ مُعَيَّنَةٍ مِنْ خلالِ التعويضِ، ثمَّ اتِّباعِ أولوياتِ العملياتِ.

مراجعةُ المفهوم

أولوياتُ العملياتِ الحسابيَّةِ

أولوياتُ العملياتِ الحسابيَّةِ، هِيَ:

1) أَجِدُ قيمةَ المِقدارِ داخلَ الأقواسِ.

2) أَجِدُ قِيَمَ المقاديرِ الأُسِّيَّةِ والجُذورِ جميعِها.

3) أضرِبُ أوْ أقسِمُ مِنَ اليسارِ إِلَى اليمينِ (أَيُّهُما أسبَقُ؟).

4) أجمعُ أوْ أطرحُ مِنَ اليسارِ إِلَى اليمينِ (أَيُّهُما أسبَقُ؟).

مثال 6

إذا كانَ $g(x) = 2x^2 + 2x - 3$، فَأَجِدُ كُلًّا ممّا يأتي:

أُلاحِظُ أنَّ أُسَّ المُتَغَيِّرِ فِي الاقترانِ $g(x)$ هُوَ 2؛ لِذا فهوَ ليسَ اقترانًا خطيًّا.

① $g(-1)$

الاقترانُ المُعطى $$g(x) = 2x^2 + 2x - 3$$

بتعويضِ $x = -1$ $$g(-1) = 2(-1)^2 + 2(-1) - 3$$

بالتبسيطِ $$= -3$$

② $3g(0) + g(2)$

بتعويضِ $x = 0, x = 2$ $$3g(0) + g(2) = 3(2(0)^2 + 2(0) - 3) + (2(2)^2 + 2(2) - 3)$$

بالتبسيطِ $$= 3(-3) + 9$$

بالتبسيطِ $$= 0$$

أتحقَّق من فهمي

إذا كانَ $h(x) = x^3 - 2x + 1$، فَأَجِدُ كُلًّا ممّا يأتي:

a) $h(-2)$

b) $h(1) - 4h(0)$

أتدرَّب وأحلُّ المسائل

أُحَدِّدُ مجالَ كُلِّ علاقةٍ مما يأتي وَمَداهُ، ثمَّ أُحَدِّدُ ما إذا كانتْ تُمَثِّلُ اقترانًا أمْ لا:

① $\{(-2, 5), (-1, 2), (0, 4), (1, -9)\}$

② $\{(4, 2), (1, 1), (0, 0), (1, -1), (4, -2)\}$

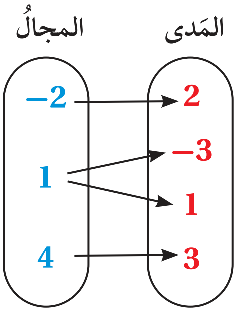
③

x	4	2	−3	4	−4
y	0	−1	0	−1	0

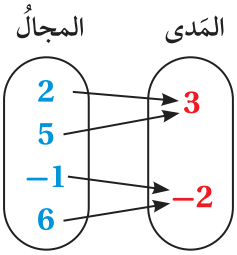
④

x	−2	−1	0	1	2
y	−3	−3	−3	−3	−3

⑤

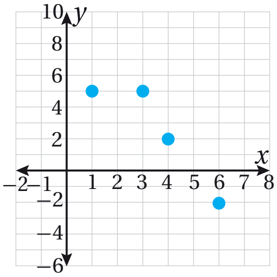


⑥

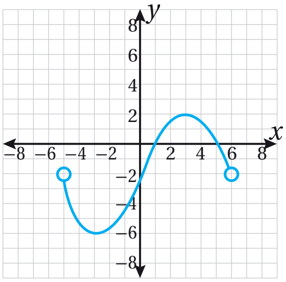


أُحَدِّدُ ما إذا كانَ كُلُّ اقترانٍ ممّا يأتي مُنفَصِلًا أمْ مُتَّصِلًا، ثمَّ أُحَدِّدُ مجالَهُ وَمَداهُ:

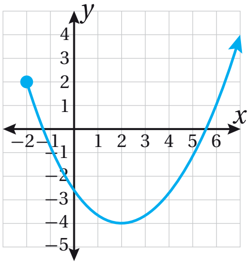
⑦



⑧

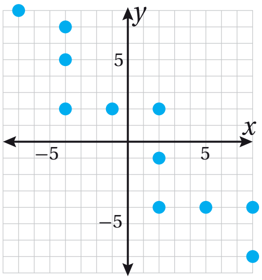


⑨

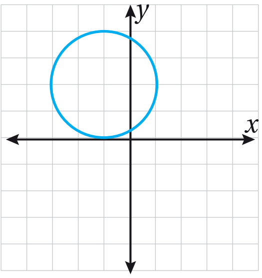


أُحَدِّدُ ما إذا كانَتِ العلاقةُ المُعطى تمثيلُها البيانيُّ في كُلٍّ ممّا يأتي تُمَثِّلُ اقترانًا أمْ لا، مُبَرِّرًا إجابتي:

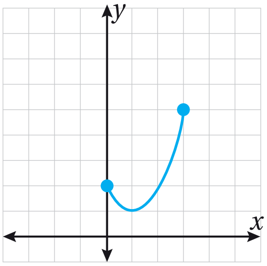
⑩



⑪



⑫



إذا كانَ $f(x) = 3x - 8$، فَأُجيبُ عَنِ الأسئلةِ الآتيةِ تِباعًا:

13 أَجِدُ $f(-3)$

14 أَجِدُ $2f(5) - 11$

15 أَجِدُ قيمةَ x، التي تجعلُ $f(x) = 19$

إذا كانَ $h(x) = \frac{x+1}{x-1}$، فَأَجِدُ كُلًّا ممّا يأتي:

18 $2h(0) - h(-2)$

17 $h(3)$

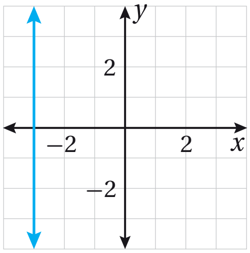
16 $h(2)$

تغذيـةٌ: يُمَثِّلُ الاقترانُ $V(c) = 98c$ عددَ وحداتِ فيتامين د، التي يمكنُ للإنسانِ أنْ يحصلَ عليها عندَ شربِهِ c كوبًا مِنَ الحليبِ.

19 أَجِدُ عددَ وحداتِ فيتامينِ د، التي يمكنُ للإنسانِ أنْ يحصلَ عليها عندَ شربِ 8 أكوابٍ مِنَ الحليبِ.

20 إذا كانَ الحدُّ الأقصى لعددِ أكوابِ الحليبِ التي يوصِي الأطباءُ المرأةَ الحاملَ أنْ تشرَبَها 4، فَأَجِدُ مجالَ الاقترانِ وَمَداهُ.

مهارات التفكير العليا



21 **أكتشفُ الخطأَ:** تقولُ هديلُ إنَّ التمثيلَ البيانيَّ المُجاورَ يُمَثِّلُ اقترانًا خطيًّا لأنَّه على شكلٍ مُستقيمٍ. أكتشِفُ الخطأَ في قولِ هديلَ، وَأُصَحِّحُهُ.

تبريرٌ: أُحَدِّدُ أيَّ الجملِ الثلاثةِ الآتيةِ صحيحةٌ وَأيُّها خطأٌ، مُبَرِّرًا إجابتي:

22 كُلُّ اقترانٍ هُوَ علاقةٌ.

23 كُلُّ علاقةٍ هِيَ اقترانٌ.

24 إذا كانَ مجالُ الاقترانِ $(-\infty, \infty)$، فإنَّ مَداهُ أيضًا سيكونُ $(-\infty, \infty)$.

25 **تبريرٌ:** أَجِدُ مجموعةَ قِيَمِ x، التي تجعلُ العلاقةَ $\{(1, 5), (x, 8), (-7, 9)\}$ اقترانًا؛ حيثُ $x \in Z$، مُبَرِّرًا إجابتي.

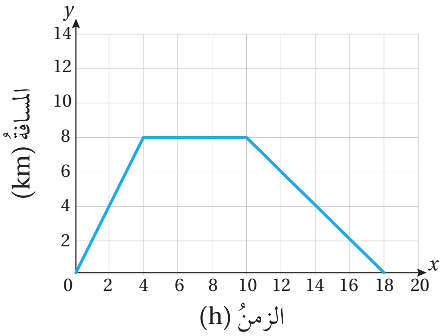
الدرس 2

تفسيرُ التمثيلاتِ البيانيَّةِ للعلاقاتِ
Analyze Graphs of a Relation

فكرة الدرس أفسّرُ الرسومَ البيانيةَ للمواقفِ الحياتيةِ.

المصطلحات مُنحنياتُ التحويلِ، مُنحنى المسافةِ – الزمنِ.

مسألة اليوم يبيّنُ الشكلُ المجاورُ التمثيلَ البيانيَّ للعلاقةِ بينَ المسافةِ التي قطعَتْها سيّارةٌ والزمنِ.



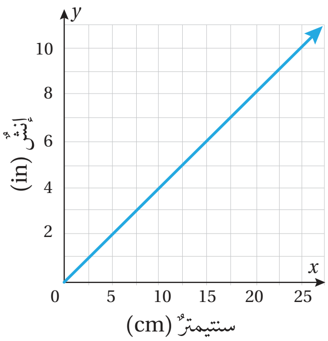
1) كمْ ساعةً استمرّتْ رحلةُ السيارةِ؟

2) ما المدّةُ الزمنيةُ التي توقّفتْها السيارةُ في أثناءِ الرحلةِ؟

تعلّمْتُ سابقًا التحويلَ بينَ وَحداتِ القياسِ المختلفةِ باستعمالِ علاقةٍ خطّيةٍ تربطُ بينَها، وسأتعلّمُ اليومَ كيفيّةَ قراءةِ وتفسيرِ **مُنحنياتِ التحويلِ** (conversion graphs)، وهيَ مُنحَنياتٌ تُستعمَلُ لتمثيلِ العلاقاتِ بينَ وَحداتِ القياسِ المختلفةِ والتحويلِ بينَها.

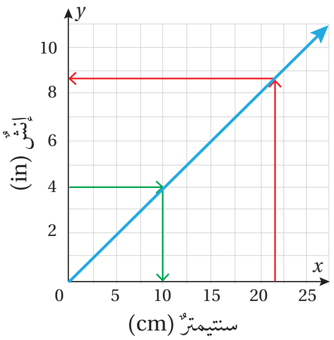
مثال 1

يبيّنُ مُنحنى التحويلِ المجاورُ العلاقةَ بينَ السنتيمتر (cm) والإنشِ (in). أستعملُ المنحنى للإجابةِ عنْ كلٍّ ممّا يأتي:



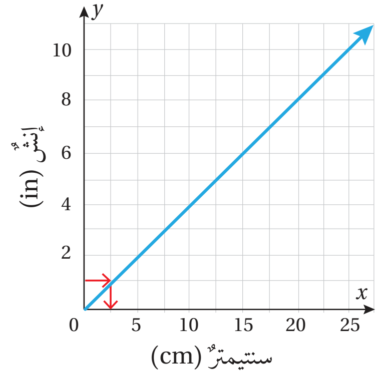
1 **أُحوِّلُ 4 in إلى وحدةِ السنتيمترِ.**

ألاحظُ منَ التمثيلِ البيانيِّ أنَّ 4 in تقابلُ 10 cm تقريبًا.



2 **أحوّلُ 22 cm إلى وَحدةِ الإنشِ.**

ألاحظُ منَ التمثيلِ البيانيِّ أنَّ 22 cm تقابلُ 8.7 in تقريبًا.



3 **أُبيّنُ كيفَ أستعملُ المُنحنى المجاورَ لتحويلِ 18 in إلى سنتيمتراتٍ.**

بما أنَّ 18 in غيرُ موجودةٍ علـى التمثيلِ البيانيِّ، أتّبعُ الخُطواتِ الآتيةَ للتحويلِ:

الْخُطْـوَةُ 1: أجدُ كمْ سنتيمترًا في الإنشِ الواحدِ.

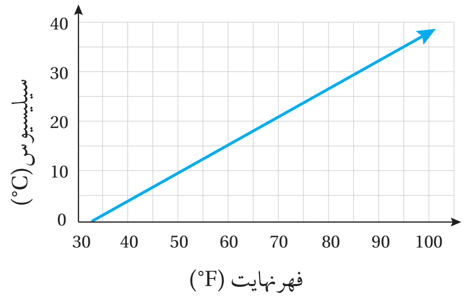
ألاحظُ منَ التمثيلِ البيانيِّ أنَّ كلَّ 1 in يقابلُ 2.5 cm تقريبًا.

الْخُطْـوَةُ 2: أضربُ 18 in في 2.5

$$18 \times 2.5 = 45$$

إذنْ، 18 in تساوي 45 cm

أتحقَّقُ من فهمي



يبيّنُ مُنحنـى التحويـلِ المجاورُ العلاقـةَ بينَ وَحدتَـيْ قياسِ درجـاتِ الحـرارةِ الفهرنهايت والسليسـوس. أسـتعملُ المنحنـى المجاورَ للإجابةِ عنْ كلٍّ ممّا يأْتي:

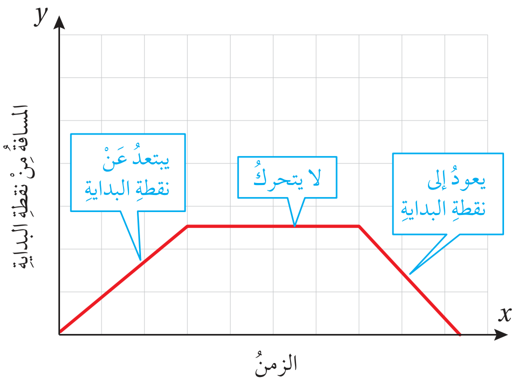
a) أحوّلُ 35° C إلى وَحدةِ الفهرنهايت.

b) أحوّلُ 50° F إلى وَحدةِ السليسوس.

c) إذا كانتْ درجةُ حرارةِ تجمّدِ الماءِ 0° C، فما درجةُ الحرارةِ المقابلةُ لها بالفهرنهايت؟

يكونُ منَ الصعبِ في بعضِ الأحيانِ وصفُ حركةِ جسـمٍ خلالَ مدّةٍ زمنيةٍ محدّدةٍ بالكلماتِ؛ لذلكَ تُسـتعملُ المُنحنياتُ لتمثيلِ تلكَ الحركةِ بوضوحٍ. يُسـتعملُ مُنْحنى **المسافة–الزمن** (distance–time graph) لتمثيلِ المسافةِ التي قطعَها جسمٌ متحركٌ خلالَ مدّةٍ زمنيةٍ معينةٍ (بينَ نقطتينِ زمنيَّتينِ).

يبيّنُ الشكلُ المجاورُ كيفَ يمكنُ لشكلِ المُنحنى أنْ يصفَ سرعةَ الجسمِ، حيثُ تظهرُ المسافةُ على المحورِ الرأسيِّ والزمنُ على المحورِ الأفقيِّ.



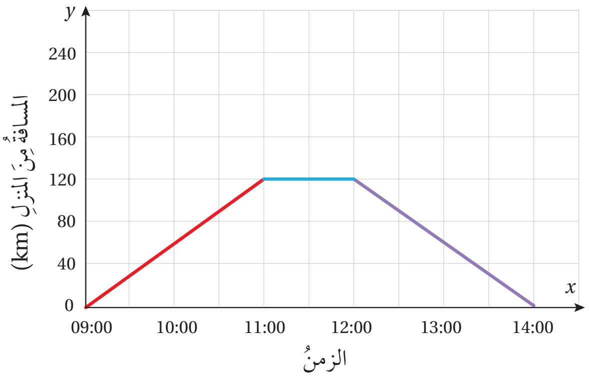
ويمكنُ إيجادُ سرعةِ الجسمِ (S) بقسمةِ التغيُّرِ في المسافةِ $(y_2 - y_1)$ على التغيُّرِ في الزمنِ $(x_2 - x_1)$ إذنْ:

$$S = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

أُلاحظُ أنَّ صيغةَ السرعةِ تشبهُ صيغةَ الميلِ، إذنْ سرعةُ الجسمِ تساوي ميلَ مُنحنى المسافةِ – الزمنِ.

مثال 2 : من الحياة

يُبيّنُ التمثيلُ البيانيُّ المجاورُ رحلةَ أحمدَ بسيارتِه منْ منزلِه إلى مطارِ الملكةِ علياءَ ليستقبلَ أخاهُ العائدَ منَ السفرِ، حيثُ مكثَ بعضَ الوقتِ في المطارِ انتظارًا لوصولِ أخيهِ، ثمَّ عادا معًا إلى المنزلِ.



1 **في أيِّ ساعةٍ غادرَ أحمدُ منزلَهُ؟**

غادرَ أحمدُ منزلَه الساعةَ 9:00 عندَما بدأَ التمثيلُ البيانيُّ الحركةَ منَ المستوى الأفقيِّ.

2 **ما المسافةُ بينَ منزلِ أحمدَ ومطارِ الملكةِ علياءَ؟**

أصبحَ مُنحنى المسافةِ – الزمنِ بينَ الساعةِ 11:00 والساعةِ 12:00 أفقيًا، ما يعني أنَّ المسافةَ بينَ أحمدَ ومنزلِه لا تتغيّرُ في هذهِ الفترةِ، إذنْ يكونُ أحمدُ عندَها وصلَ إلى المطارِ، وهذا يدلُّ على أنَّ المطارَ يبعدُ عنْ منزلِ أحمدَ 120 km .

أتعلَّمُ

الوقتُ بصيغةِ الـ 24 ساعةً هو نظامٌ يبدأُ فيهِ اليومُ منْ منتصفِ الليلِ إلى منتصفِ الليلِ الذي يليهِ خلالَ دورةٍ واحدةٍ مكوَّنةٍ من الـ 24 ساعةً اليوميةِ.

3 **كمْ أمضى أحمدُ مِنَ الوقتِ في المطارِ؟**

تقعُ القطعةُ الأفقيةُ منَ المُنحنى بينَ الساعةِ 11:00 والساعةِ 12:00 وطولُها يساوي الزمنَ الذي أمضاهُ أحمدُ في المطارِ. إذنْ، أمضى أحمدُ ساعةً واحدةً في المطارِ.

4 **أجدُ سرعةَ السيارةِ في المدّةِ الزمنيةِ: 9:00–11:00**

لِأَجِدَ سرعةَ السيارةِ في المُدّةِ الزمنيةِ 11:00–9:00؛ يتطلّبُ أنْ أجِدَ ميلَ المستقيمِ في هذهِ المُدّةِ.

صيغةُ الميلِ	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
أعوّضُ عن (x_1, y_1) بِـ $(9, 0)$ وعن (x_2, y_2) بِـ $(11, 120)$	$= \frac{120 - 0}{11 - 9}$
أُبسّطُ	$= \frac{120}{2} = 60$

بما أنَّ ميلَ المستقيمِ هو 60، إذنْ سرعةُ السيارةِ في المدّةِ الزمنيّةِ 11:00 – 9:00 تساوي 60 km/ h.

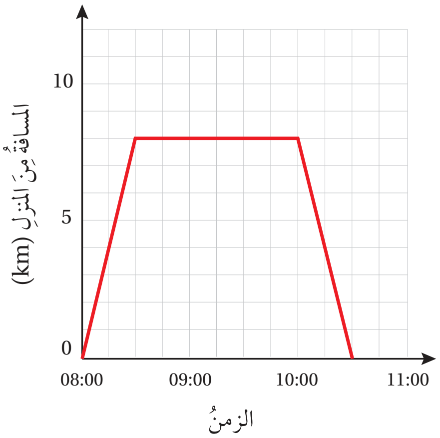
5 **أجدُ سرعةَ السيارةِ في المدّةِ الزمنيّةِ 12:00–14:00، ثمَّ أُبيّنُ ماذا تمثّلُ.**

صيغةُ الميلِ	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
أعوّضُ عن (x_1, y_1) بِـ $(12, 120)$ وعن (x_2, y_2) بِـ $(14, 0)$	$= \frac{0 - 120}{14 - 12}$
أُبسّطُ	$= \frac{-120}{2} = 60$

بما أنَّ ميلَ المستقيمِ هو −60؛ فإنَّ القيمةَ السالبةَ للميلِ تعني أنَّ أحمدَ بدأَ بالعودةِ إلى المنزلِ الساعةَ 12:00 بسرعةٍ ثابتةٍ مقدارُها 60 km/ h، ووصلَ إلى منزلِه الساعةَ 14:00

أتحقَّق من فهمي

يبيّنُ التمثيلُ البيانيُّ المجاورُ رحلةَ خالدٍ على درّاجتِه من منزلِه إلى المكتبةِ، حيثُ أمضى بعضَ الوقتِ فيها، ثمَّ عادَ بدرّاجتِه إلى المنزلِ.



a) في أيِّ ساعةٍ غادرَ خالدٌ منزلَه؟

b) ما المسافةُ بينَ منزلِ خالدٍ والمكتبةِ؟

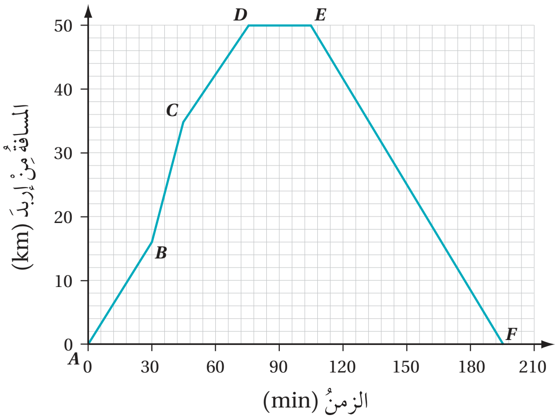
c) كمْ أمضى خالدٌ منَ الوقتِ في المكتبةِ؟

d) أجدُ سرعةَ خالدٍ في المدّةِ الزمنيةِ 10:00–10:30، ثمَّ أبيّنُ ماذا تمثّلُ.

يُظهِرُ مُنْحنى المسافةِ – الزمنِ في المثالِ السابقِ المسافةَ التي يقطعُها جسمٌ متحركٌ بينَ أوقاتٍ مختلفةٍ منْ ساعاتِ اليومِ. وتوجدُ أيضًا مُنحَنياتٌ تُظهِرُ المسافةَ التي يقطعُها الجسمُ المتحركُ بعدَ مرورِ مدّةٍ زمنيّةٍ محدّدةٍ منْ لحظةِ انطلاقِه كما هو موضَّحٌ في المثالِ الآتي.

مثال 3

يمثّلُ مُنحنى المسافةِ – الزمنِ رحلةَ حافلةٍ نقلتْ ركّابًا من مدينةِ إربدَ إلى مدينةِ المفرقِ، حيثُ توقّفَ سائقُ الحافلةِ في الموقفِ مدّةً منَ الزمنِ لتحميلِ الركّابِ، ثمَّ عادَ إلى مدينةِ إربدَ.



1 ما المسافةُ بينَ إربدَ والمفرقِ؟

أصبحَ مُنحنى المسافةِ – الزمنِ بعدَ ما يقاربُ 75 دقيقةً أفقيًّا، ما يعني أنَّ المسافةَ بينَ إربدَ والمفرقِ لا تتغيرُ، إذنْ تكونُ عندَها الحافلةُ وصلتْ إلى مدينةِ المفرقِ، وهذا يدلُّ على أنَّ مدينةَ إربدَ تبعدُ عنْ مدينةِ المفرقِ 50 km

2 **ما المدّةُ الزمنيةُ التي انتظرَها سائقُ الحافلةِ في الموقفِ لتحميلِ الركابِ؟**

بما أن المُنحنى أفقيًّا بينَ 75 دقيقةً و105 دقائقَ منَ انطلاقِ الحافلةِ منْ إربدَ إلى المفرقِ، فهذا يعني أنَّ الحافلةَ توقَّفتْ 30 دقيقةً في المفرقِ لتحميلِ الركابِ.

3 **ما زمنُ الرحلةِ كلِّها ؟**

أُلاحظُ منَ المُنحنى أنَّ زمنَ الرحلةِ كلِّها 195 دقيقةً تقريبًا، أيْ 3 ساعاتٍ وربع.

4 **ماذا يمكنُنا القولُ عمّا يتعلّقُ برحلةِ الحافلةِ منَ النقطةِ E إلى النقطةِ F؟**

بدأتِ الحافلةُ بالعودةِ منْ مدينةِ المفرقِ إلى مدينةِ إربدَ بينَ هاتينِ النقطتينِ، واستغرقتْ رحلةُ العودةِ 90 دقيقةً.

5 **أحسُبُ سرعةَ الحافلةِ في المدّةِ منْ C إلى D .**

لِأَجِدَ سرعةَ السيارةِ في المدّةِ منْ C إلى D ؛يتطلبُ أنْ أجِدَ مَيلَ المستقيمِ في هذهِ المدةِ:

صيغةُ الميلِ
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

أعوّضُ عن (x_1, y_1) بِـ $(45, 35)$
وعن (x_2, y_2) بِـ $(75, 50)$
$$= \frac{50 - 35}{75 - 45}$$

أُبسّطُ
$$= \frac{15 \text{ km}}{30 \text{ min}}$$

وبما أنَّ الحافلةَ قطعَتْ 15 km في 30 min، إذن يمكنُني إيجادُ سرعةِ الحافلةِ في الساعةِ الواحدةِ.

المسافةُ التي قطعَتْها الحافلةُ في 30 دقيقةً
$$\frac{15 \text{ km}}{30 \text{ min}}$$

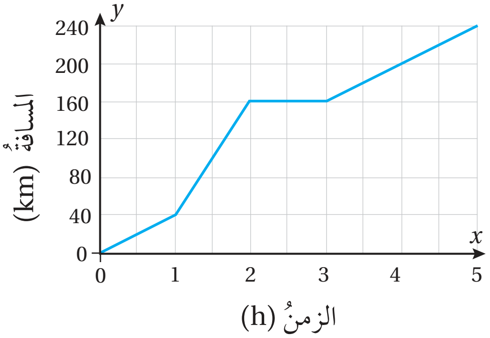
أضربُ في 3 لتحويلِ سرعةِ الحافلةِ بوَحدةِ الكيلومترِ لكلِّ ساعة
$$= \frac{15 \times 2 \text{ km}}{30 \times 2 \text{ min}}$$

أُبسّطُ
$$= \frac{30 \text{ km}}{60 \text{ min}}$$

كلُّ 60 min تساوي 1 ساعةً واحدةً
$$= \frac{30 \text{ km}}{1 \text{ h}}$$

إذنْ، سرعةُ الحافلةِ منْ C إلى D تساوي 30 km/h

أتحقَّق من فهمي



يبينُ التمثيلُ البيانيُّ المجاورُ رحلةَ بهاءَ بسيارتِه منْ مدينةِ الكركِ متَّجهًا إلى عملِه في مدينةِ العقبةِ عبرَ طريقِ الغورِ الأردنيِّ.

a) ما المسافةُ بينَ مدينةِ الكركِ ومدينةِ العقبةِ؟

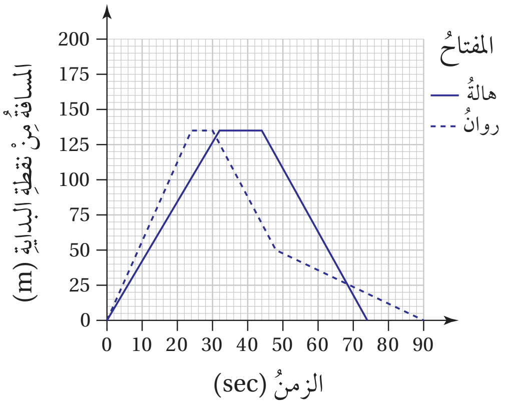
b) ما المدّةُ الزمنيّةُ التي استغرقَها لأخذِ استراحةٍ؟

c) أحسُبُ سرعةَ السيارةِ في الجزءِ الأخيرِ منَ الرحلةِ.

d) إذا وصلَ بهاءُ مدينةَ العقبةِ الساعةَ 1 p.m.، ففي أيِّ ساعةٍ انطلقَ منْ مدينةِ الكركِ؟

تعلَّمْتُ في الأمثلةِ السابقةِ قراءةَ وتفسيرَ التمثيلِ البيانيِّ لمُنحنًى واحدٍ، ولكنْ تُظهرُ بعضُ التمثيلاتِ أكثرَ منْ مُنحنًى في التمثيلِ البيانيِّ نفسِه، مثلَ مُنحنى المسافةِ – الزمنِ لأكثرَ منْ شخصٍ، وعندئذٍ نكونُ في حاجةٍ إلى المقارنةِ بينَ المُنحنيَينِ.

مثال 4

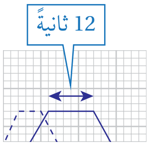


يبيّنُ التمثيلُ البيانيُّ المجاورُ سباقًا بينَ روانَ وهالةَ، حيثُ ركَضَتا إلى نهايةِ الطريقِ المجاورِ لمنزلِهما، وأخذَتْ كلٌّ منهُما استراحةً قصيرةً، ثمَّ عادَتا ركضًا إلى نقطةِ البدايةِ، وفي طريقِ العودةِ التوى كاحلُ روانَ.

1 أيُّهما أنهتِ السباقَ بوقتٍ أقصرَ؛ روانُ أمْ هالةُ؟ ولماذا؟

أنهتْ هالةُ السباقَ أوّلًا، حيثُ يظهرُ منَ التمثيلِ البيانيِّ أنَّ مُنحنى هالةَ وصلَ إلى المحورِ x قبلَ مُنحنى روانَ، حيثُ أنهتْ هالةُ السباقَ في 75 ثانيةً، في حينِ أنهتْ روانُ السباقَ في 90 ثانيةً.

2 **ما مقدارُ الوقتِ الذي استراحتْ فيهِ هالةُ؟**



استراحتْ هالةُ مدةَ 12 ثانيةً كما يظهرُ في الشكلِ المجاورِ.

3 **بعدَ كم ثانيةٍ من بدءِ السباقِ التوى كاحلُ روانَ؟**

التوى كاحلُ روانَ بعدَ 48 ثانيةً، وذلكَ لأنَّ سرعتَها قلَّتْ فجأةً عندَ الثانيةِ 48، ويظهرُ ذلكَ في التمثيلِ البيانيِّ، حيثُ قلَّ مَيلُ المُنحنى بعدَ الثانيةِ 48.

4 **ماذا حدثَ بعدَ 68 ثانيةً منْ بدءِ السباقِ؟**

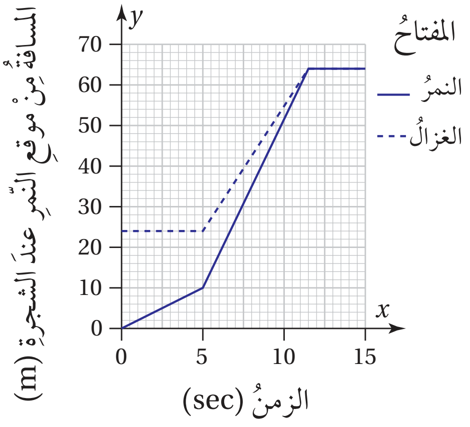
ألاحظُ أنَّ المُنحَنَيينِ تقاطَعا في الثانيةِ 68، وهذا يدلُّ على أنَّ هالةَ وروانَ كانتَا على البعدِ نفسِه منْ نقطةِ البدايةِ/ النهايةِ في تلكَ اللحظةِ.

أتعلَّمُ

أقرأُ مقياسَ الرسمِ للتمثيلِ البيانيِّ جيدًا، وألاحظُ أنَّ كلَّ مربعٍ صغيرٍ يمثلُ ثانيتينِ.

أتحقَّقُ من فهمي

رصدَ نَمِرٌ غزالًا عندَما كانَ أسفلَ شجرةٍ، ثمَّ بدأَ بمطاردةِ الغزالِ حتى اصطادَهُ. يبيّنُ التمثيلُ البيانيُّ الآتي المطاردةَ بينَ النّمِرِ والغزالِ.



a) كم كانتِ المسافةُ بينَ الغزالِ والنّمرِ عندَ بَدْءِ المطاردةِ؟

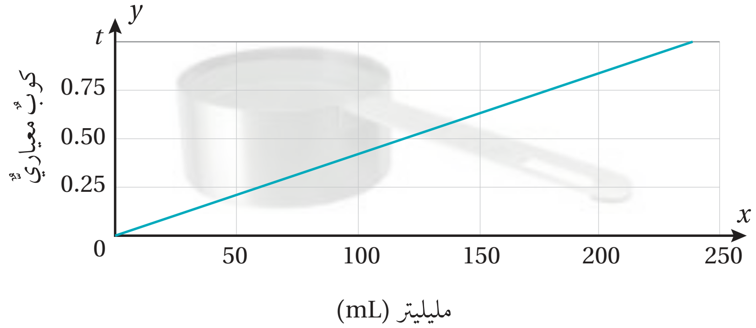
b) ماذا فعلَ الغزالُ بينَ الثانيةِ 0 والثانيةِ 5؟

c) كمْ ثانيةً ركضَ الغزالُ قبلَ أنْ يصطادَهُ النّمرُ؟

d) كيفَ أستدِلُّ منَ التمثيلِ البيانيِّ أنَّ النمرَ أسرعُ منَ الغزالِ؟

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

يبيّنُ مُنحنى التحويلِ الآتي العلاقةَ بينَ المليلترِ ووَحدةِ الكوبِ المعياريِّ الذي يُستَعملُ لقياسِ الكمياتِ في الطبخِ.



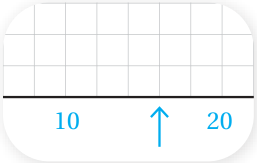
1 كمْ مليلترًا منَ السائلِ يقابلُ الكوبَ المعياريَّ الواحدَ؟

2 كمْ كوبًا معياريًّا يقابلُ 150 mL؟

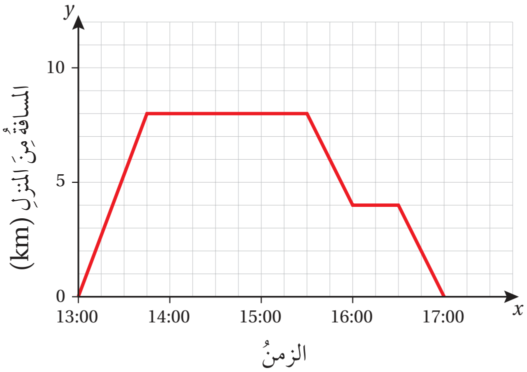
3 كمْ مليلترًا منَ السائلِ تحتاجُ إليهِ وصفةٌ تتطلّبُ كوبًا ونصفًا.

أتعلَّمُ

عندمَا أقرأُ التمثيلَ البيانيَّ أحدّدُ مقياسَ الرسمِ أولًا لمعرفةِ ما يمثلُه كلُّ مربعٍ في المستوى الإحداثيِّ، ويمكنُ التحقُّقُ منْ ذلكَ بالعدِّ. فمثلًا يشيرُ السهمُ في الشكلِ أدناهُ إلى العددِ 16



يبينُ التمثيلُ البيانيُّ المجاورُ رحلةَ زيدٍ علَى دراجتِه منْ منزلِه إلى المَرْكزِ الثقافيِّ، وفي طريقِ عودتِه إلى المنزلِ توقَّفَ عندَ أحدِ المحالِّ التجاريةِ.



4 في أيِّ ساعةٍ غادرَ زيدٌ المنزلَ؟

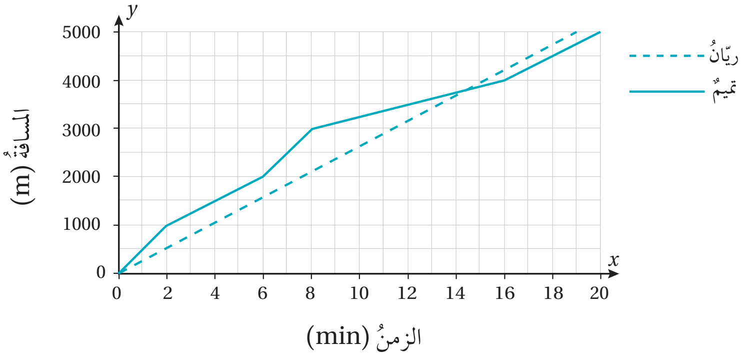
5 كمْ يبعدُ المركزُ الثقافيُّ عنْ منزلِ زيدٍ؟

6 كمْ يبعدُ المحلُّ التجاريُّ عنْ منزلِ زيدٍ؟

7 كمْ أمضى زيدٌ منَ الوقتِ في المركزِ الثقافيِّ؟

8 أجدُ سرعةَ زيدٍ في المدّةِ الزمنيةِ 15:30–16:00، ثمَّ أُبيّنُ ماذا تمثّلُ.

شاركَ كلٌّ منْ تميمٍ وريّانَ في سباقِ 5000 m للجري. ويبينُ الشكلُ المجاورُ العَلاقةَ بينَ المسافةِ التي قطعَها كُلٌّ منهُما والزمنِ الذي استغرقَهُ في أثناءِ السباقِ.

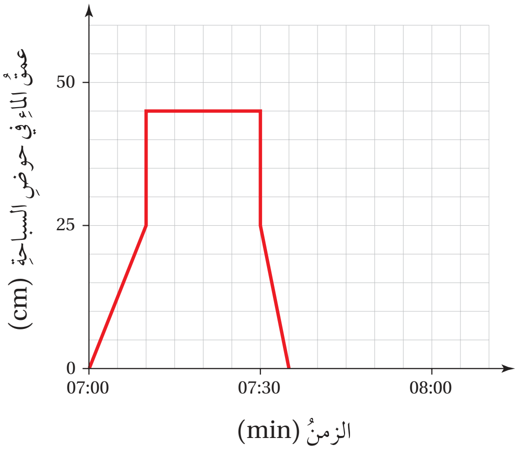


9 أيُّهما ركضَ بسرعةٍ ثابتةٍ تميمٌ أم ريّانُ؟ أبرّرُ إجابتِي

10 أجدُ سرعةَ ريّانَ خلالَ السباقِ.

11 مَنْ فازَ بالسباقِ ريّانُ أم تميمٌ؟ أبرّرُ إجابتِي.

ملأَ كمالٌ حوضَ استحمامٍ بالماءِ، وعندَما أصبحَ فيهِ كميّةٌ مناسبةٌ منَ الماءَ نزلَ فيهِ مدةً زمنيةً معينةً، ثمَّ خرجَ وأفرغَ الحوضَ منَ الماءِ. يبيّنُ التمثيلُ البيانيُّ المجاورُ عُمْقَ الماءِ في الحوضِ خلالَ هذهِ المدّةِ.

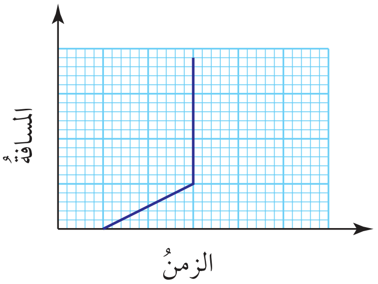


12 ما عمقُ الماءِ في الحوضِ قبلَ نزولِ كمالٍ فيهِ؟

13 ما عمقُ الماءِ في الحوضِ عندَما نزلَ كمالٌ فيهِ؟

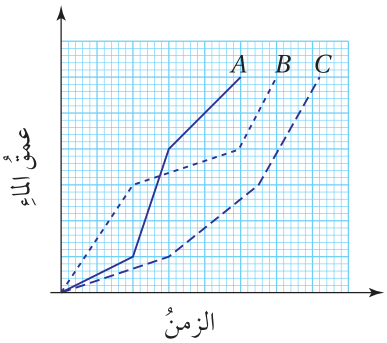
14 كمْ دقيقةً أمضى كمالٌ في الحوضِ؟

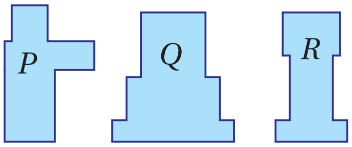
مهارات التفكير العليا



15 **تبريرٌ:** لماذا لايمكنُ أنْ يكونَ أيُّ جزءٍ منْ منحنى المسافةِ – الزمنِ رأسيًّا كما هو مبيَّنٌ في الشكلِ المجاورِ؟ أبرّرُ إجابتِي.

تبريرٌ: يتدفّقُ الماءُ بمعدّلٍ ثابتٍ ومتساوٍ في ثلاثةِ أنابيبَ تتصلُ بالأوعيةِ P وَ R وَ Q المُبيَّنةِ أدناهْ لِمَلْئِها، ويوضّحُ التمثيلُ البيانيُّ المجاورُ عمقَ الماءِ في كلِّ وعاءٍ معَ مرورِ الزمنِ.





16 أصلُ المُنْحَنياتِ A و B و C بالوعاءِ المناسبِ لكلٍّ منها، مبرّرًا إجابتِي.

17 ماذا تعني القطعةُ المستقيمةُ الأفقيّةُ في منحنى المسافةِ – الزمنِ؟

الدرس
3

الاقترانُ التربيعيُّ
Quadratic Function

فكرة الدرس

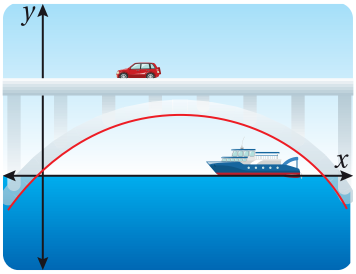
- تعرُّفُ الاقترانِ التربيعيِّ وخصائصِهِ.
- تمثيلُ الاقترانِ التربيعيِّ بيانيًّا فِي المُستوى الإحداثيِّ.

المصطلحات

الاقترانُ التربيعيُّ، الصورةُ القياسيَّةُ، الاقترانُ الرئيسُ، قطعٌ مُكافِئٌ، محورُ التَّماثُلِ، الرأسُ، نقطةُ القيمةِ الصُّغرى، نقطةُ القيمةِ العُظمى.

مسألة اليوم

يُمَثِّلُ الاقترانُ $f(x) = -0.007x^2 + 0.51x + 0.8$ ارتفاعَ دعامةِ جسرٍ على شكلِ قوسٍ عَنْ سطحِ الماءِ بالأمتارِ؛ حيثُ x المسافةُ الأفقيَّةُ مِنْ نقطةِ التقاءِ الدعامةِ معَ سطحِ الماءِ. هلْ يمكنُ لسفينةٍ ارتفاعُها 8 m المرورَ أسفلَ الجسرِ؟ أُبرِّرُ إجابتي.



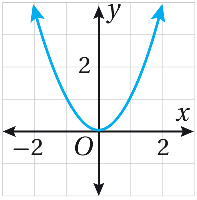
خصائصُ الاقترانِ التربيعيِّ

الاقترانُ التربيعيُّ (quadratic function) اقترانٌ غيرُ خطيٍّ يمكنُ كتابتُهُ عَلَى الصورةِ $f(x) = ax^2 + bx + c$؛ حيثُ $a \neq 0$، التي تُسَمَّى **الصورةَ القياسيَّةَ** (standard form) للاقترانِ التربيعيِّ، وَمِنْ أمثلتِهِ:

$$f(x) = 4x^2 + 3x + 1 \qquad g(x) = x^2 - 2x \qquad h(x) = 3x^2$$

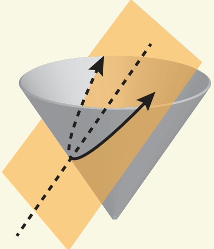
يُعَدُّ الاقترانُ $f(x) = x^2$ أبسطَ صورِ الاقترانِ التربيعيِّ؛ لِذا يُسَمَّى **الاقترانَ الرئيسَ** (parent function) لعائلةِ الاقتراناتِ التربيعيَّةِ.

يأخذُ التمثيلُ البيانيُّ للاقترانِ التربيعيِّ شكلَ الحرفِ الإنجليزيِّ U، ويُسمّى **قطعًا مُكافِئًا** (parabola)، كما في الشكلِ المُجاورِ، الذي يُظهِرُ التمثيلَ البيانيَّ للاقترانِ $f(x) = x^2$.



أتعلَّم

يَنتُجُ القطعُ المكافئُ مِنْ تقاطعِ مُستوًى مائلٍ ومخروطٍ.

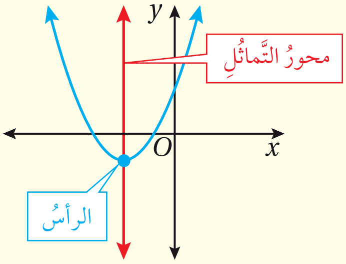


محورُ التَّماثُلِ (axis of symmetry) هُوَ المُستقيمُ الذي يقسِمُ القطعَ المُكافِئَ إلى جُزأيْنِ مُتطابقَيْنِ، ويقطعُهُ في نقطةٍ واحدةٍ تُسَمَّى **الرأسَ** (vertex).

مفهومٌ أساسيٌّ

محورُ تَماثُلِ الاقترانِ التربيعيِّ ورأسُهُ

مُعادلةُ محورِ التَّماثُلِ لِمُنحنى الاقترانِ التربيعيِّ $f(x) = ax^2 + bx + c$؛ حيثُ $a \neq 0$ هِيَ $x = -\frac{b}{2a}$، وإحداثِيَّيْ رأسِهِ $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$



مثال 1

أَجِدُ مُعادلةَ محورِ التَّماثُلِ، وإحداثِيَّيْ رأسِ الاقترانِ التربيعيِّ $f(x) = 5x^2 - 10x + 4$

بما أنَّ $a = 5$ و $b = -10$، فيمكنُ إيجادُ مُعادلةِ محورِ التَّماثُلِ كالآتي:

$$x = -\frac{b}{2a}$$ مُعادلةُ محورِ التَّماثُلِ

$$= -\frac{-10}{2(5)}$$ بتعويضِ $a = 5, b = -10$

$$= 1$$ بالتبسيطِ

إذنْ، مُعادلةُ محورِ التَّماثُلِ هِيَ: $x = 1$

لإيجادِ إحداثِيَّيِ الرأسِ، أعتبرُ القيمةَ الناتجةَ عَنْ مُعادلةِ محورِ التَّناظُرِ هِيَ الإحداثيُّ x لرأسِ القطعِ المُكافِئِ، ثمَّ أُعَوِّضُها في قاعدةِ الاقترانِ لإيجادِ الإحداثيِّ y.

$$f(x) = 5x^2 - 10x + 4$$ الاقترانُ المُعطى

$$f(1) = 5(1)^2 - 10(1) + 4$$ بتعويضِ $x = 1$

$$= -1$$ بالتبسيطِ

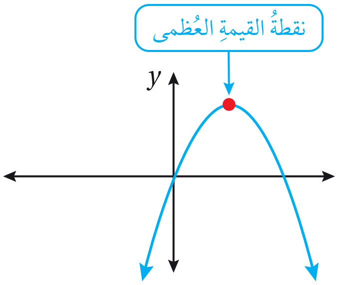
إذنْ، إحداثيّا الرأسِ $(1, -1)$

أتحقَّقُ من فهمي

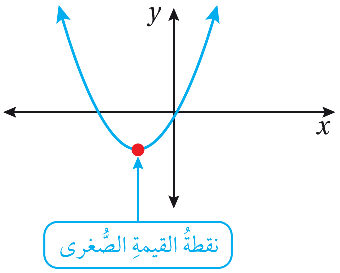
أَجِدُ مُعادلةَ محورِ التَّماثُلِ، وإحداثِيَّيْ رأسِ الاقترانِ التربيعيِّ $f(x) = x^2 + 2x - 1$

يكـونُ التمثيلُ البيانيُّ للاقتـرانِ التربيعـيِّ $f(x) = ax^2 + bx + c$؛ حيـثُ $a \neq 0$ مفتوحٌ للأعلى إذا كانَ $a > 0$، وَتُسَـمّى أدنى نقطةٍ فيهِ **نقطةَ القيمةِ الصُّغرى** (minimum point)، ويكـونُ مفتوحًـا للأسـفلِ إذا كانَ $a < 0$، وَتُسَـمّى أعلى نقطـةٍ فيهِ **نقطةَ القيمـةِ العُظمى** (maximum point)، وَتُمَثِّـلُ نقطةُ القيمةِ الصُّغرى أوْ نقطةُ القيمـةِ العُظمى رأسَ القطعِ المُكافِئِ.

$a < 0$



$a > 0$



مجالُ الاقترانِ التربيعيِّ هُوَ جميعُ الأعدادِ الحقيقيَّةِ، أمّا مَداهُ فيمكنُ تحديدُهُ كالآتي:

مفهومٌ أساسيٌّ **مَدى الاقترانِ التربيعيِّ**

إذا كانَ $f(x) = ax^2 + bx + c$؛ حيثُ $a \neq 0$، فإنَّ مَدى $f(x)$ يكونُ:

- مجموعةَ الأعدادِ الحقيقيَّةِ التي تزيدُ عَلَى القيمةِ الصُّغرى أوْ تُساويها.
- مجموعةَ الأعدادِ الحقيقيَّةِ التي تقلُّ عَنِ القيمةِ الصُّغرى أوْ تُساويها.

لغةُ الرِّياضياتِ

يُشـيرُ مُصطلـحُ نقطـةِ القيمةِ العُظمى إلَى النقطةِ (x, y)، أمّـا مُصطلـحُ القيمةِ العُظمى فَيُشيرُ إلَى الإحداثيِّ y لنقطةِ القيمةِ العُظمـى، وكذلكَ الأمرُ بالنسـبةِ إلى نقطةِ القيمةِ الصُّغرى.

مثال 2

أَجِدُ القيمةَ العُظمـى أوِ الصُّغرى وَمَجالَ فتحةِ القطعِ المُكافِـئِ وَمَداها وَاتِّجاهَها في كُلٍّ ممّا يأتي:

1 $f(x) = x^2 + 6x + 9$

فِي الاقترانِ $f(x) = x^2 + 6x + 9$، $a = 1, b = 6$

بمـا أنَّ $a > 0$ فالتمثيلُ البيانيُّ للاقترانِ التربيعيِّ يكونُ مفتوحًا للأعلى، ويكونُ للاقترانِ قيمةٌ صُغرى يمكنُ إيجادُها كالآتي:

الخطوةُ 1: أَجِدُ الإحداثِيَّ x للرأسِ.

الإحداثيُّ x للرأسِ $x = -\frac{b}{2a}$

بتعويضِ $a = 1, b = 6$ $= -\frac{6}{2(1)}$

بالتبسيطِ $= -3$

الخطوةُ 2: أَجِدُ الإحداثِيَّ y للرأسِ.

الاقترانُ المُعطى $f(x) = x^2 + 6x + 9$

بتعويضِ $x = -3$ $f(-3) = (-3)^2 + 6(-3) + 9$

بالتبسيطِ $= 0$

إذنْ، القيمةُ الصُّغرى للاقترانِ هِيَ 0

المجالُ: جميعُ الأعدادِ الحقيقيَّةِ أوْ $(-\infty, \infty)$.

المَدى: $\{y \mid y \geq 0\}$ أوْ $[0, \infty)$.

2 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$

فِي الاقترانِ $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$، $a = -\frac{1}{2}, b = 1$

بما أنَّ $a < 0$، فالتمثيلُ البيانيُّ للاقترانِ التربيعيِّ يكونُ مفتوحًا للأسفلِ، ويكونُ للاقترانِ قيمةٌ عُظمى يمكنُ إيجادُها كالآتي:

الخطوةُ 1: أَجِدُ الإحداثِيَّ x للرأسِ.

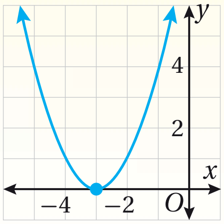
الإحداثيُّ x للرأسِ $x = -\frac{b}{2a}$

بتعويضِ $a = -\frac{1}{2}, b = 1$ $= -\frac{1}{2(-\frac{1}{2})}$

بالتبسيطِ $= 1$

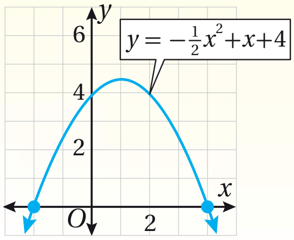
الدَّعمُ البيانيُّ

يُظهِرُ التمثيلُ البيانيُّ للاقترانِ $f(x) = x^2 + 6x + 9$ أَنَّهُ مفتوحٌ للأعلى ورأسُهُ النقطةُ $(-3, 0)$.



الدَّعمُ البيانيُّ

يُظهِرُ التمثيلُ البيانيُّ للاقترانِ $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$ أَنَّهُ مفتوحٌ للأسفلِ ورأسُهُ النقطةُ $(1, 4\frac{1}{2})$.



الخطوةُ 2: أَجِدُ الإحداثيَّ y للرأسِ.

الاقترانُ المُعطى	$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$
بتعويضِ $x = 1$	$f(1) = -\frac{1}{2}(1)^2 + 1 + 4$
بالتبسيطِ	$= 4\frac{1}{2}$

إذنْ، القيمةُ العُظمى للاقترانِ هِيَ $4\frac{1}{2}$

المجالُ: جميعُ الأعدادِ الحقيقيَّةِ أَوْ $(-\infty, \infty)$.

المَدى: $\{y \mid y \leq 4\frac{1}{2}\}$ أَوْ $(-\infty, 4\frac{1}{2}]$.

أتحقَّق من فهمي

أَجِدُ القيمةَ العُظمى أوِ الصُّغرى وَمَجالَ فتحةِ القطعِ المُكافِئِ وَمَداها وَاتِّجاهَها في كُلٍّ ممّا يأتي:

a) $f(x) = 2x^2 - 2x + 8$

b) $f(x) = -3x^2 + 12x + 9$

للاقتراناتِ التربيعيَّةِ الكثيرُ مِنَ التطبيقاتِ الحياتيَّةِ، منها الألعابُ الناريَّةُ، التي تتكوَّنُ مِنْ أُنبوبٍ يحتوي عَلَى البارودِ ومجموعةٍ مِنَ الأغلفةِ الصغيرةِ تُسَمّى كُلٌّ منها نجمةٌ، وعندَ إشعالِ الفتيلِ تنطلقُ النُّجومُ إِلَى الأعلى لِيَنفَجِرَ كُلُّ نجمٍ عندَ ارتفاعٍ مُعَيَّنٍ، وَيَرسُمُ الضَّوءُ الناتجُ عَنِ انفجارِ النَّجمِ فِي الجَوِّ قطعًا مُكافِئًا.

مثال 3 : من الحياة

ألعابٌ ناريَّةٌ: يُمَثِّلُ الاقترانُ $h(t) = -16t^2 + 72t + 520$ ارتفاعَ نجمةِ ألعابٍ ناريَّةٍ عَنْ سطحِ الأرضِ بالأمتارِ، بعدَ t ثانيةً مِنَ انفجارِها.

1 **أَجِدُ الارتفاعَ الذي انفجرتْ عندَهُ النجمةُ.**

الزمنُ الذي تنفجرُ عندهُ النجمةُ فِي الجَوِّ هُوَ $t = 0$

الاقترانُ المُعطى $h(t) = -16t^2 + 72t + 520$

بتعويضِ $t = 0$ $h(0) = -16(0)^2 + 72(0) + 520$

بالتبسيطِ $= 520$

إذنْ، انفجرَتِ النجمةُ علَى ارتفاعِ 520 m مِنْ سطحِ الأرضِ.

2 **أَجِدُ أقصَى ارتفاعٍ يصلُ إليهِ النجمُ.**

يصلُ النجمُ إلى أقصَى ارتفاعٍ لهُ عندَ رأسِ القطعِ المُكافِئِ؛ لِذا أَجِدُ القيمةَ العُظمى للقطعِ.

الخطوةُ 1: أَجِدُ الإحداثِيَّ x للرأسِ.

الإحداثيُّ x للرأسِ $x = -\frac{b}{2a}$

بتعويضِ $a = -16, b = 72$ $= -\frac{72}{2(-16)}$

بالتبسيطِ $= 2.25$

الخطوةُ 2: أَجِدُ الإحداثِيَّ y للرأسِ.

الاقترانُ المُعطى $h(t) = -16t^2 + 72t + 520$

بتعويضِ $t = 2.25$ $h(2.25) = -16(2.25)^2 + 72(2.25) + 520$

بالتبسيطِ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ $= 601$

إذنْ، أقصَى ارتفاعٍ تصلُ إليهِ النجمةُ 601 m

أتحقَّق من فهمي

كرةُ قدمٍ: يُمَثِّلُ الاقترانُ $h(t) = -16t^2 + 64t$ ارتفاعَ كرةِ قدمٍ عنْ سطحِ الأرضِ بالأقدامِ، بعدَ t ثانيةً مِنْ ركلِها.

a) أَجِدُ ارتفاعَ الكرةِ بعدَ 3 ثوانٍ مِنْ ركلِها.

b) أَجِدُ أقصَى ارتفاعٍ تصلُ إليهِ الكرةُ.

معلومةٌ

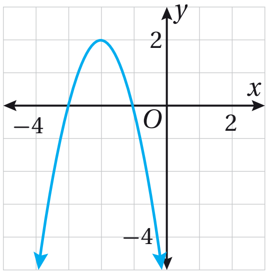
تحتوي اللعبةُ الناريَّةُ على فتيلٍ يُشعِلُ البارودَ، وعندما تسخنُ الموادُّ الكيميائيَّةُ تمتصُّ ذرّاتُها الطاقةَ فَتَنْتُجُ الأضواءُ، لِتَفْقِدَ الذرّاتُ طاقتَها الزائدةَ. وتختلفُ كميّاتُ الطاقةِ والألوانُ تبعًا لاختلافِ الموادِّ الكيميائيَّةِ المُستخدَمةِ.

تحديدُ خصائصِ الاقترانِ التربيعيِّ مِنْ تمثيلِهِ البيانيِّ

تعلَّمتُ فِي المثالَيْنِ السابقَيْنِ تحديدَ خصائصِ الاقترانِ التربيعيِّ مِنْ قاعدتِهِ، وسأتعلَّمُ في هذا المثالِ تحديدَ خصائصِهِ مِنْ تمثيلِهِ البيانيِّ.

مثال 4

أَجِدُ رأس، ومُعادلةَ محورِ التَّماثُلِ، وَالقيمةَ العُظمى أوِ الصُّغرى وَمَجالَ وَمَدى القطعِ المُكافِئِ المُمَثَّلِ بيانيًّا فِي المُستوى الإحداثيِّ المُجاورِ:



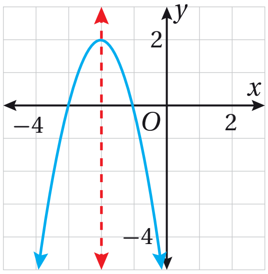
الخطوةُ 1: أَجِدُ إحداثِيَّي الرأسِ.

بما أنَّ القطعَ مفتوحٌ للأسفلِ فالرأسُ يُمَثِّلُ نقطتَهُ العُظمى، وهي $(-2, 2)$.

أتذكَّرُ

الإحداثيُّ x للرأسِ هُوَ نفسُهُ العددُ الذي يَظهَرُ في مُعادلةِ محورِ التَّماثُلِ.

الخطوةُ 2: أَجِدُ مُعادلةَ محورِ التَّماثُلِ.



بما أنَّ محورَ التَّماثُلِ هُوَ المُستقيمُ الذي يقسِمُ القطعَ المُكافِئَ إلى جزأيْنِ متطابقَيْنِ، ويقطعُ القطعَ المُكافِئَ فِي الرأسِ، فإنَّ مُعادلةَ محورِ التَّماثُلِ هِيَ $x = -2$

الخطوةُ 3: أَجِدُ القيمةَ العُظمى.

بما أنَّ القيمةَ العُظمى هِيَ الإحداثيُّ y لنقطةِ الرأسِ، فإنَّ القيمةَ العُظمى للاقترانِ هِيَ 2.

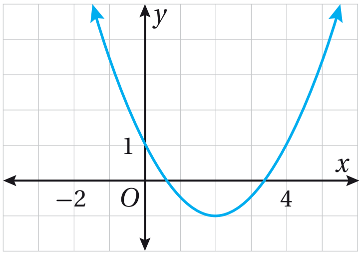
الخطوةُ 4: أَجِدُ المجالَ وَالمَدى.

المجالُ: جميعُ الأعدادِ الحقيقيَّةِ أوْ $(-\infty, \infty)$.

المَدى: $\{y \mid y \leq 2\}$ أوْ $(-\infty, 2]$.

أتحقَّقُ من فهمي

أَجِدُ رأس، ومُعادلةَ محورِ التَّماثُلِ، وَالقيمةَ العُظمى أوِ الصُّغرى وَمَجالَ وَمَدى القطعِ المُكافِئِ المُمَثَّلِ بيانيًّا فِي المُستوى الإحداثيِّ المُجاورِ:



تمثيلُ الاقترانِ التربيعيِّ بيانيًّا

يمكنُ استعمالُ خصائصِ الاقترانِ التربيعيِّ لتمثيلِهِ بيانيًّا.

مفهومٌ أساسيٌّ **تمثيلُ الاقترانِ التربيعيِّ بيانيًّا**

لتمثيلِ الاقترانِ التربيعيِّ بيانيًّا، أتّبعُ الخُطواتِ الآتيةَ:

الخطوةُ 1: أُحَدِّدُ اتِّجاهَ فتحةِ القطعِ المُكافِئِ، وَأَجِدُ مُعادلةَ محورِ التَّماثُلِ وإحداثِيَّي الرأسِ، وَأُحَدِّدُ إذا كانَ يُمَثِّلُ نقطةً صُغرى أمْ نقطةً عُظمى.

الخطوةُ 2: أَجِدُ نقطةَ تقاطعِ الاقترانِ معَ المحورِ y.

الخطوةُ 3: أَجِدُ نقطةً أُخرى باختيارِ قيمةٍ لـ x تقعُ فِي الجانبِ الذي يقعُ فيهِ المقطعُ y يمينَ محورِ التَّماثُلِ أوْ يسارَهُ.

الخطوةُ 4: أُمَثِّلُ رأسَ القطعِ والنقطتَيْنِ اللتَيْنِ أوجدتُهُما مِنَ الخُطوتَيْنِ 2 وَ 3، ثمَّ أستعملُ التَّماثُلَ لأعكِسَ النقطتَيْنِ مِنَ الخُطوتَيْنِ 2 وَ 3 حولَ محورِ التَّماثُلِ؛ لإيجادِ نقطتَيْنِ أُخرَيَيْنِ عَلَى التَّمثيلِ البيانِيِّ.

الخطوةُ 5: أصلُ بينَ النقاطِ بِمُنحنى أملَسَ.

مثال 5

أُمَثِّلُ الاقترانَ: $f(x) = -3x^2 + 6x + 5$

الخطوةُ 1: أُحَدِّدُ اتِّجاهَ فتحةِ القطعِ المُكافِئِ، وَأَجِدُ مُعادلةَ محورِ التَّماثُلِ وإحداثِيَّي الرأسِ، وَأُحَدِّدُ إذا كانَ يُمَثِّلُ نقطةً صُغرى أمْ نقطةً عُظمى.

في الاقترانِ $f(x) = -3x^2 + 6x + 5$، $a = -3, b = 6$

بما أنَّ $a < 0$، فالتمثيلُ البيانيُّ للقطعِ المُكافِئِ يكونُ مفتوحًا للأسفلِ، وَيُمَثِّلُ الرأسُ نقطتَهُ العُظمى.

- **أَجِدُ مُعادلةَ محورِ التَّماثُلِ.**

مُعادلةُ محورِ التَّماثُلِ	$x = -\frac{b}{2a}$
بتعويضِ $a = -3, b = 6$	$= -\frac{6}{2(-3)}$
بالتبسيطِ	$= 1$

إذنْ، مُعادلةُ محورِ التَّماثُلِ هِيَ $x = 1$

- **أَجِدُ إحداثِيَّي الرأسِ.**

الاقترانُ المُعطى	$f(x) = -3x^2 + 6x + 5$
بتعويضِ $x = 1$	$f(1) = -3(1)^2 + 6(1) + 5$
بالتبسيطِ	$= 8$

إذنْ، إحداثِيّا الرأسِ $(1, 8)$.

الخطوةُ 2: أَجِدُ نقطةَ تقاطعِ الاقترانِ معَ المحورِ y.

لإيجادِ نقطةِ تقاطعِ الاقترانِ معَ المحورِ y، أُعَوِّضُ $x = 0$ في قاعدةِ الاقترانِ.

الاقترانُ المُعطى	$f(x) = -3x^2 + 6x + 5$
بتعويضِ $x = 0$	$f(0) = -3(0)^2 + 6(0) + 5$
بالتبسيطِ	$= 5$

إذنْ، نقطةُ تقاطعِ الاقترانِ معَ المحورِ y هِيَ $(0, 5)$.

الخطوةُ 3: أَجِدُ نقطةً أُخرى باختيارِ قيمةٍ لِـ x تقعُ فِي الجانبِ الذي يقعُ فيهِ المقطعُ y يمينَ محورِ التَّماثُلِ أوْ يسارَهُ.

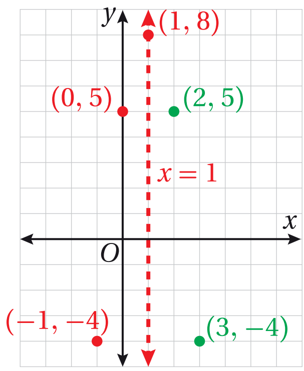
أختارُ $x = -1$

الاقترانُ المُعطى	$f(x) = -3x^2 + 6x + 5$
بتعويضِ $x = -1$	$f(-1) = -3(-1)^2 + 6(-1) + 5$
بالتبسيطِ	$= -4$

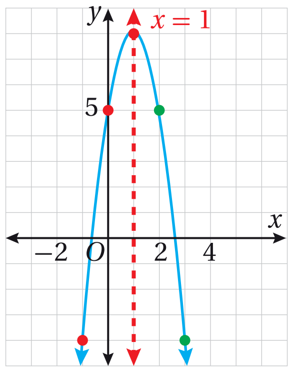
إذنْ، النقطةُ الأُخرى هِيَ $(-1, -4)$.

الخطوةُ 4: أُمَثِّلُ النقاطَ فِي المُستوَى الإحداثيِّ.

أُمَثِّـلُ رأسَ القطـعِ والنقطتَيْـنِ اللتَيْـنِ أوجدتُهما مِنَ الخُطوتَيْـنِ 2 وَ 3، وَهُمـا $(0, 5)$ وَ $(-1, -4)$، ثـمَّ أستعملُ التَّماثُلَ لأعكِسَ النقطتَيْنِ $(0, 5)$ وَ $(-1, -4)$ حولَ محورِ التَّماثُلِ؛ لإيجادِ نقطتَيْنِ أُخريَيْنِ عَلَى التمثيلِ البيانيِّ.



الخطوةُ 5: أَصِلُ بينَ النقاطِ بِمُنحنًى أملَسَ.



أتعلَّمُ

بمـا أنَّ محـورَ التَّماثُلِ يقسِـمُ القطـعَ المُكافِئَ إلى جُزأيْنِ متطابقَيْنِ فإنَّ لكلِّ نقطةٍ على يسارِ هذا المحـورِ نقطـةً تناظرُها على يمينِـهِ وَتَبعُـدُ عنهُ المسافةَ نفسَـها، ويكونُ للنقطتَيْـنِ الإحداثِـيُّ y نفسُهُ.

أتحقَّقُ من فهمي

أُمَثِّلُ الاقترانَ: $f(x) = x^2 - 4x - 5$

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أَجِدُ رأسَ، ومُعادلةَ محورِ التَّماثُلِ، والقيمةَ العُظمى أوِ الصُّغرى وَمَجالَ وَمَدى الاقتراناتِ التربيعيَّةِ الآتيةِ:

① $f(x) = 3x^2$

② $f(x) = \frac{1}{2}x^2$

③ $f(x) = -x^2 + 5$

④ $f(x) = x^2 + 3$

⑤ $f(x) = 3x^2 + 6x - 2$

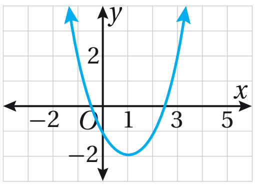
⑥ $f(x) = -8x + 2x^2$

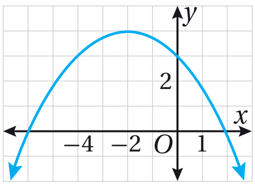
⑦ $f(x) = -2x^2 - 6x + 4$

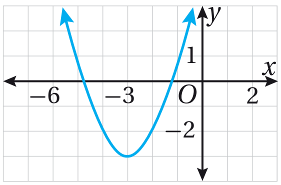
⑧ $f(x) = 5 + 16x - 2x^2$

⑨ $f(x) = -2(x-4)^2 - 3$

أَجِدُ رأس، ومُعادلةَ محورِ التَّماثُلِ، والقيمةَ العُظمى أوِ الصُّغرى ومجالَ وَمَدى كلٍّ مِنَ القطوعِ المُكافِئةِ الآتيةِ:

⑩


⑪


⑫


أُمَثِّلُ كُلًّا مِنَ الاقتراناتِ الآتيةِ بيانيًّا:

⑬ $f(x) = x^2 + 6x - 2$

⑭ $f(x) = 2x^2 - 10x + 1$

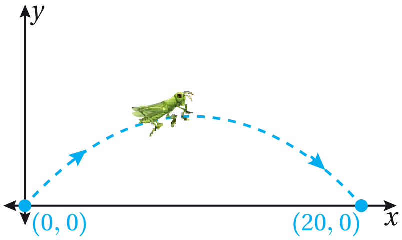
⑮ $f(x) = -3x^2 + 18x + 6$

⑯ $f(x) = -4x^2 - 8x + 7$

⑰ $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6$

⑱ $f(x) = 5x^2 - 20$

⑲ **حشــراتٌ**: يُمَثِّلُ الاقترانُ $f(x) = -\frac{1}{20}x^2 + x$ ارتفاعَ قفزةِ جندبٍ بالسنتيمترِ فوقَ سطحِ الأرضِ؛ حيثُ x المسافةُ الأفقيَّةُ مِنْ نقطةِ القفزِ. أَجِدُ أقصى ارتفاعٍ يمكنُ أنْ يَصِلَ إليهِ الجندبُ.



رياضــةٌ: **يُمَثِّلُ الاقتــرانُ $h(t) = -4.9t^2 + 3.8t + 0.5$ ارتفاعَ كرةِ مضربٍ بالأمتارِ فوقَ سطحِ الأرضِ، بعدَ t ثانيةً مِنْ ضربِ سميرٍ لها.**

⑳ أَجِدُ ارتفاعَ الكرةِ لحظةَ ضربِ سميرٍ لها.

㉑ أَجِدُ أقصى ارتفاعٍ يمكنُ أنْ تَصِلَ إليهِ الكرةُ.

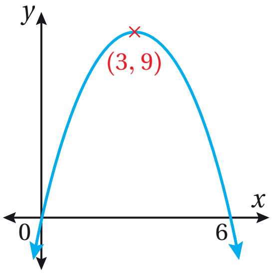
مهارات التفكير العليا

㉒ **مسألةٌ مفتوحةٌ**: أكتبُ قاعدةَ اقترانٍ تربيعيٍّ مُعادلةُ محورِ تماثُلِهِ $x = -2$.

㉓ **أكتشــفُ الخطأَ**: حاولَ هشــامٌ ومَلَكُ إيجادَ مُعادلةِ محورِ التَّماثُلِ للقطــعِ المُكافِئِ $f(x) = -2x^2 - 16x + 7$، فكانَتْ إجابَتاهُما كالآتي. أيُّهُما إجابتُهُ صحيحةٌ؟ أُبَرِّرُ إجابتي.

هشامٌ	مَلَكُ
$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{16}{2(-2)}$	$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-16)}{2(-2)}$
$x = 4$	$x = -4$

㉔ **تَحَدٍّ**: أَجِدُ قاعدةَ الاقترانِ المُمَثَّلِ بيانيًّا في الشكلِ المُجاورِ.



معمـلُ برمـجيَّـةِ جيوجيبـرا

استكشافُ التحويلاتِ الهندسيَّةِ للاقترانِ التربيعيِّ

Exploring Transformations of Quadratic Function

الهدفُ: يمكنُني استعمالُ برمجيَّةِ جيوجيبرا؛ لاستكشافِ أثرِ التحويلاتِ الهندسيَّةِ في مُنحنى الاقترانِ الرئيسِ $f(x) = x^2$

نشاطٌ

الخطوةُ 1: أكتبُ قاعدةَ الاقترانِ $f(x) = x^2$ في شريطِ الإدخالِ، ثمَّ أضغطُ ↵ ، ليظهرَ التمثيلُ البيانيُّ للاقترانِ.

الخطوةُ 2: أنقرُ على أيقونةِ Slider مِنْ شريطِ الأدواتِ، ثمَّ أنقرُ علَى الموقعِ الذي أريدُهُ فِي الشاشةِ، ليظهرَ مربَّعُ حوارٍ أُحَدِّدُ فيهِ أعلى قيمةٍ وأقلَّ قيمةٍ لـ a (مثلًا، أقلُّ قيمةٍ -10 وأعلى قيمةٍ 10)، وأضبطُ المؤشِّرَ علَى العددِ 1.

الخطوةُ 3: أُكَرِّرُ الخُطوةَ السابقةَ لإدراجِ مؤشِّرَيْنِ للتحكُّمِ، وَأُسَمّي أحدَهُما h، والآخَرَ k، وأضبطُ المؤشِّرَيْنِ علَى العددِ 0

الخطوةُ 4: أكتبُ القاعدةَ $g(x) = a\,(x-h)^2 + k$ في شريطِ الإدخالِ، ثمَّ أضغطُ ↵ ، ليظهرَ التمثيلُ البيانيُّ للاقترانِ.

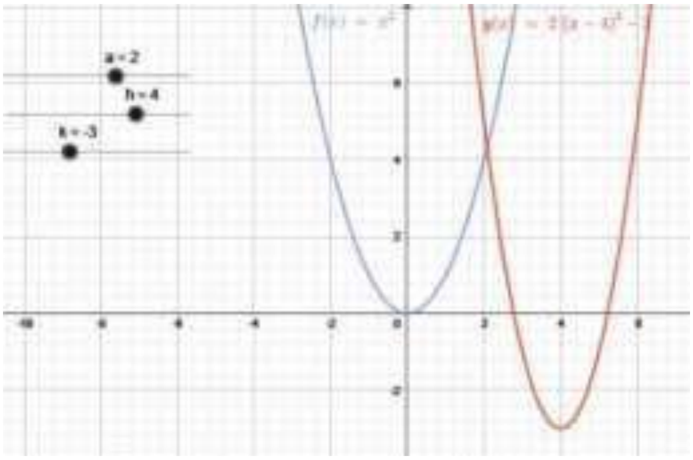
الخطوةُ 5: أُحَرِّكُ المؤشِّرَ a لتصبحَ قيمتُهُ مَرَّةً أكبرَ مِنْ 1، وَمَرَّةً بينَ 0 وَ 1، وَمَرَّةً أقلَّ مِنْ 1، ثمَّ أُجيبُ عَنِ الأسئلةِ الآتيةِ:

- ما تأثيرُ تغييرِ قيمةِ a عندما تكونُ أكبرَ مِنْ 1 على مُنحنى الاقترانِ g بالمقارنةِ معَ مُنحنى الاقترانِ f؟
- ما تأثيرُ تغييرِ قيمةِ a عندما تكونُ بينَ 0 وَ 1 على مُنحنى الاقترانِ g بالمقارنةِ معَ مُنحنى الاقترانِ f؟
- ما تأثيرُ تغييرِ قيمةِ a عندما تكونُ أصغرَ مِنْ 0 على مُنحنى الاقترانِ g بالمقارنةِ معَ مُنحنى الاقترانِ f؟

الخطوةُ 6: أُحَرِّكُ المؤشِّــرَ h بحيثُ تصبحُ قيمتُهُ مَرَّةً أكبرَ مِنْ 0، ومَرَّةً أقلَّ مِنْ 0، ثمَّ أُجيبُ عَنِ الأسئلةِ الآتيةِ:

- في أيِّ الاتجاهاتِ يتحرَّكُ الاقترانُ g عندَ تحريكِ المؤشِّرِ h؟
- ما تأثيرُ تغييرِ قيمةِ h عندما تكونُ أكبـرَ مِنْ 0 على مُنحنى الاقترانِ g بالمقارنةِ معَ مُنحنى الاقترانِ f؟
- ما تأثيرُ تغييرِ قيمةِ h عندما تكونُ أصغرَ مِنْ 0 على مُنحنى الاقترانِ g بالمقارنةِ معَ مُنحنى الاقترانِ f؟

الخطوةُ 7: أُحَرِّكُ المؤشِّــرَ k بحيث تصبحُ قيمتُهُ مَرَّةً أكبــرَ مِنْ 0، ومَرَّةً أقلَّ مِنْ 0، ثمَّ أُجيبُ عنِ الأسئلةِ الآتيةِ:



- في أيِّ الاتجاهاتِ يتحرَّكُ الاقترانُ g عندَ تحريكِ المؤشِّرِ k؟
- ما تأثيرُ تغييرِ قيمةِ k عندما تكونُ أكبرَ مِـنْ 0 على مُنحنى الاقترانِ g بالمقارنةِ معَ مُنحنى الاقترانِ f؟
- مــا تأثيرُ تغييرِ قيمةِ k عندما تكونُ أصغرَ مِنْ 0 على مُنحنى الاقترانِ g بالمقارنةِ معَ مُنحنى الاقترانِ f؟

الخطوةُ 8: أَضْبطُ المؤشِّراتِ الثلاثةَ على أعدادٍ أختارُها، ثمَّ أَصِفُ علاقةَ مُنحنى الاقترانِ g بِمُنحنى الاقترانِ الرئيسِ f.

الدرس 4

التحويلاتُ الهندسيَّةُ للاقترانِ التربيعيِّ

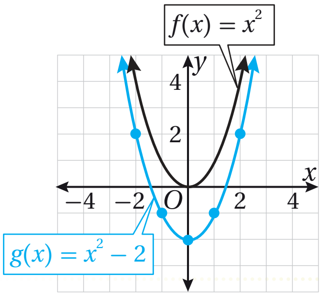
Transformations of Quadratic Function

فكرة الدرس تمثيلُ مُنحنياتِ الاقتراناتِ التربيعيَّةِ الناتجةِ عنْ تطبيقِ تحويلٍ هندسيٍّ أوْ أكثرَ على مُنحنى الاقترانِ الرئيسِ.

المصطلحات التحويلُ الهندسيُّ، الانسحابُ، الانسحابُ الرأسيُّ، الانسحابُ الأفقيُّ، التمدُّدُ، الانعكاسُ، صيغةُ الرأسِ.

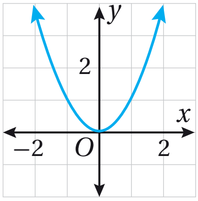
مسألة اليوم يُبيِّنُ الشكلُ المُجاورُ التمثيلَ البيانيَّ لِمُنْحَنَيَيْ الاقترانَيْنِ $f(x) = x^2$ و $g(x) = x^2 - 2$.

ما العلاقةُ بينَ مُنْحَنَيَيِ الاقترانَيْنِ f وَ g؟



الانسحابُ

تعلَّمتُ سابقًا أنَّ الاقترانَ الرئيسَ لعائلةِ الاقتراناتِ التربيعيَّةِ هُوَ $f(x) = x^2$، الذي يأخذُ مُنحناهُ شكلَ القطعِ المُكافِئِ، كما في الشكلِ المُجاورِ.



أمّا مُنحنياتُ الاقتراناتِ التربيعيَّةِ الأُخرى فهيَ ناتجةٌ عنْ تطبيقِ **تحويلٍ هندسيٍّ** (transformation) أوْ أكثرَ على مُنحنى الاقترانِ الرئيسِ، بحيثُ تغيِّرُ هذهِ التحويلاتُ الهندسيَّةُ موقعَ الاقترانِ الرئيسِ أوْ أبعادَهُ.

يُعَدُّ **الانسحابُ** (translation) أحدَ التحويلاتِ الهندسيَّةِ التي تؤثِّرُ في موقعِ الاقترانِ الرئيسِ وتنقُلُهُ إمّا إلى الأعلى أوْ إلى الأسفلِ أوْ إلى اليمينِ أوْ إلى اليسارِ دونَ التغييرِ في أبعادِهِ.

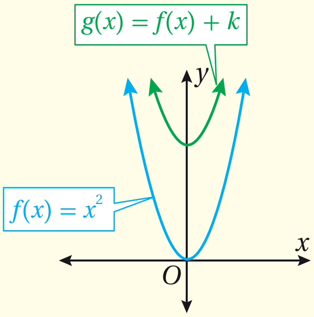
عندَ إضافةِ الثابتِ الموجبِ k إلى قاعدةِ الاقترانِ الرئيسِ $f(x)$ أوْ طرحِهِ منها فإنَّ مُنحنى الاقترانِ $f(x) \pm k$ هُوَ مُنحنى الاقترانِ الرئيسِ مُزاحًا إلى الأعلى أوْ إلى الأسفلِ بمقدارِ k وحدةً، وَيُسَمّى هذا التحويلُ **الانسحابَ الرأسيَّ** (vertical translation).

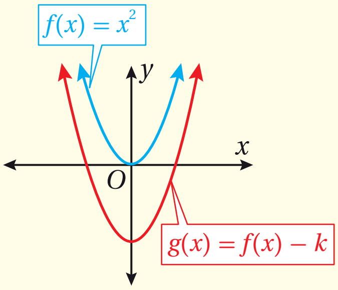
مفهومٌ أساسيٌّ

الانسحابُ الرأسيُّ للاقترانِ التربيعيِّ

إذا كانَ $f(x) = x^2$ وكانَ k عددًا حقيقيًّا موجبًا، فإنَّ:

- مُنحنى $g(x) = x^2 + k$، هُوَ مُنحنى $f(x)$ مُزاحًا إلَى الأعلى k وحدةً.
- مُنحنى $g(x) = x^2 - k$، هُوَ مُنحنى $f(x)$ مُزاحًا إلَى الأسفلِ k وحدةً.





مثال 1

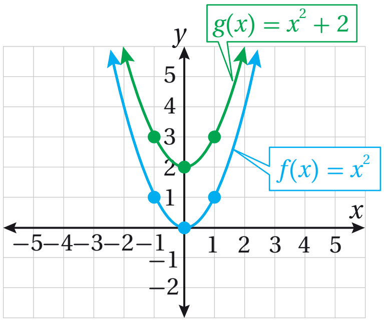
أَصِفُ كيفَ يرتبطُ مُنحنى كلِّ اقترانٍ ممّا يأتي بِمُنحنى الاقترانِ الرئيسِ $f(x) = x^2$، ثمَّ أُمَثِّلُهُ بيانيًّا:

1 $g(x) = x^2 + 2$

مُنحنى $g(x)$ هُوَ مُنحنى $f(x) = x^2$ مُزاحًا وحدتَيْنِ إلَى الأعلى.

لتمثيلِ مُنحنى $g(x)$ بيانيًّا أَتَّبعُ الإجراءاتِ الآتيةَ:

- أختارُ مجموعةً مِنَ النقاطِ التي تقعُ على مُنحنى $f(x) = x^2$.
- أُضيفُ 2 للإحداثيِّ y للنقاطِ التي اخترتُها.
- أُمَثِّلُ النقاطَ الجديدةَ فِي المُستوى الإحداثيِّ، ثمَّ أَصِلُ بينها بِمُنحنى أملَسَ، كما يظهَرُ فِي الشكلِ المُجاورِ.



أتعلَّمُ

عندَ اختيارِ مجموعةٍ مِنَ النقاطِ على مُنحنى الاقترانِ الرئيسِ يُفَضَّلُ أنْ تتوسَّطَ نقطةُ الرأسِ هذهِ النقاطَ. فمثلًا، يمكنُ اختيارُ النقاطِ الآتيةِ:

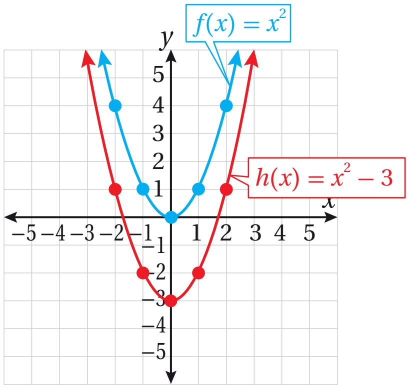
$(-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)$

2 $h(x) = x^2 - 3$

مُنحنى $h(x)$ هُوَ مُنحنى $f(x) = x^2$ مُزاحًا 3 وحداتٍ إِلَى الأسفلِ.

لتمثيلِ مُنحنى $h(x)$ بيانيًّا أتَّبعُ الإجراءاتِ الآتيةَ:

- أختارُ مجموعةً مِنَ النقاطِ التي تقعُ على مُنحنى $f(x) = x^2$.
- أطرحُ 3 مِنَ الإحداثيِّ y للنقاطِ التي اخترتُها.
- أُمَثِّلُ النقاطَ الجديدةَ فِي المُستوى الإحداثيِّ، ثمَّ أَصِلُ بينها بمُنحنًى أملَسَ، كما يظهَرُ فِي الشكلِ المُجاورِ.



أتحقَّق من فهمي

أَصِفُ كيفَ يرتبطُ مُنحنى كلِّ اقترانٍ ممّا يأتي بِمُنحنى الاقترانِ الرئيسِ $f(x) = x^2$، ثمَّ أُمَثِّلُهُ بيانيًّا:

a) $p(x) = x^2 + 3$

b) $t(x) = x^2 - 4$

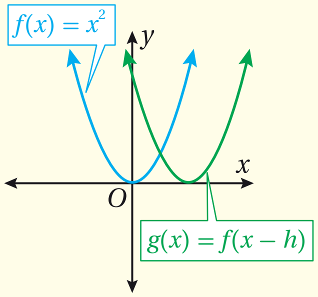
عندَ إضافةِ الثابتِ الموجبِ h إلى قِيَمِ x جميعِها في مجالِ الاقترانِ $f(x)$ أوْ طرحِهِ منها، فإنَّ مُنحنى الاقترانِ $f(x \pm h)$ هُوَ مُنحنى الاقترانِ الرئيسِ مُزاحًا إلَى اليمينِ أوْ إلَى اليسارِ بِمقدارِ h وحدةً، وَيُسَمّى هذا التحويلُ **الانسحابَ الأفقيَّ** (horizontal translation).

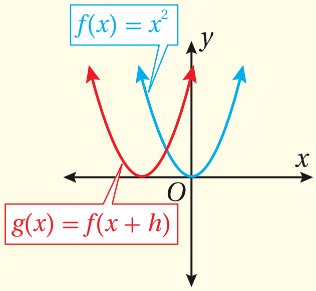
مفهومٌ أساسيٌّ

الانسحابُ الأفقيُّ للاقترانِ التربيعيِّ

إذا كانَ $f(x) = x^2$ وكانَ h عددًا حقيقيًّا موجبًا، فإنَّ:

- مُنحنى $g(x) = (x - h)^2$، هُوَ مُنحنى $f(x)$ مُزاحًا إلَى اليمينِ h وحدةً.
- مُنحنى $g(x) = (x + h)^2$، هُوَ مُنحنى $f(x)$ مُزاحًا إلَى اليسارِ h وحدةً.





مثال 2

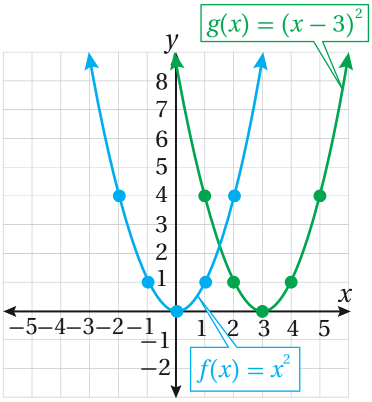
أَصِفُ كيفَ يرتبطُ مُنحنى كلِّ اقترانٍ ممّا يأتي بِمُنحنى الاقترانِ الرئيسِ $f(x) = x^2$، ثمَّ أُمَثِّلُهُ بيانيًّا:

1 $g(x) = (x-3)^2$

مُنحنى $g(x)$ هُوَ مُنحنى $f(x) = x^2$ مُزاحًا 3 وحداتٍ إلَى اليمينِ.

لتمثيلِ مُنحنى $g(x)$ بيانيًّا أتَّبعُ الإجراءاتِ الآتيةَ:

- أختارُ مجموعةً مِنَ النقاطِ تقعُ على مُنحنى $f(x) = x^2$.
- أُضيفُ 3 إلَى الإحداثيِّ x للنقاطِ التي اخترتُها.
- أُمَثِّلُ النقاطَ الجديدةَ فِي المُستوى الإحداثيِّ، ثمَّ أَصِلُ بينها بِمُنحنًى أملَسَ، كما يظهَرُ فِي الشكلِ المُجاورِ.

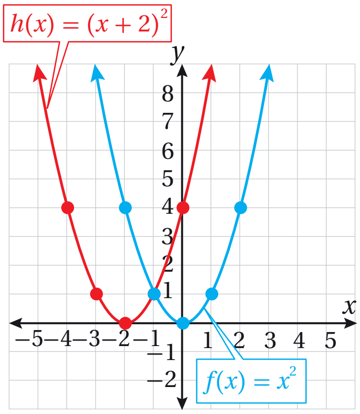


2 $h(x) = (x+2)^2$

مُنحنى $h(x)$ هُوَ مُنحنى $f(x) = x^2$ مُزاحًا وحدتَيْنِ إلَى اليسارِ.

لتمثيلِ مُنحنى $h(x)$ بيانيًّا أتَّبعُ الإجراءاتِ الآتيةَ:

- أختارُ مجموعةً مِنَ النقاطِ التي تقعُ على مُنحنى $f(x) = x^2$.
- أطرحُ 2 مِنَ الإحداثيِّ x للنقاطِ التي اخترتُها.
- أُمَثِّلُ النقاطَ الجديدةَ فِي المُستوى الإحداثيِّ، ثمَّ أَصِلُ بينها بِمُنحنًى أملَسَ، كما يظهَرُ فِي الشكلِ المُجاورِ.



أتحقَّقُ من فهمي

أَصِفُ كيفَ يرتبطُ مُنحنى كلِّ اقترانٍ ممّا يأتي بِمُنحنى الاقترانِ الرئيسِ $f(x) = x^2$، ثمَّ أُمَثِّلُهُ بيانيًّا:

a) $p(x) = (x-4)^2$

b) $t(x) = (x+3)^2$

التمدُّدُ

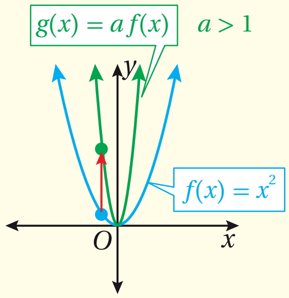
التمدُّدُ (dilation) هُوَ تحويلٌ هندسيٌّ يؤدّي إلى توسيعِ مُنحنى الاقترانِ أوْ تضييقِهِ، فعندَ ضربِ الاقترانِ الرئيسِ $f(x)$ بالثابتِ a؛ حيثُ a عددٌ حقيقيٌّ، فإنَّ مُنحنى الاقترانِ $a\,f(x)$ هُوَ توسيعٌ أوْ تضييقٌ رأسيٌّ لِمُنحنى الاقترانِ $f(x)$.

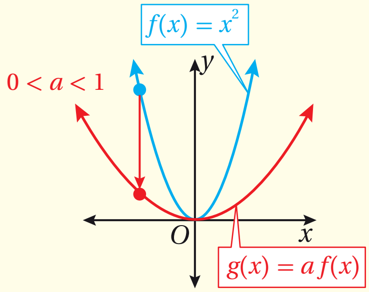
مفهومٌ أساسيٌّ

تمددُ الاقترانِ التربيعيِّ

إذا كانَ $f(x) = x^2$ وكانَ a عددًا حقيقيًّا موجبًا، فإنَّ مُنحنى $g(x) = ax^2$ هُوَ:

- توسيعٌ رأسيٌّ بَمعاملٍ مقدارُهُ a لِمُنحنى $f(x)$، إذا كانتْ $a > 1$.
- تضييقٌ رأسيٌّ بِمعاملٍ مقدارُهُ a لِمُنحنى $f(x)$، إذا كانتْ $0 < a < 1$





مثال 3

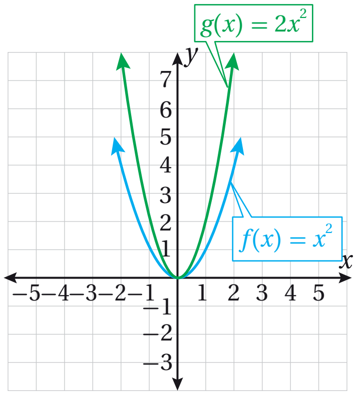
أَصِفُ كيفَ يرتبطُ مُنحنى كلِّ اقترانٍ ممّا يأتي بِمُنحنى الاقترانِ الرئيسِ $f(x) = x^2$، ثمَّ أُمَثِّلُهُ بيانيًّا:

① $g(x) = 2x^2$

مُنحنى $g(x)$ هُوَ توسيعٌ رأسيٌّ لِمُنحنى $f(x) = x^2$ بِمعاملٍ مقدارُهُ 2.

لتمثيلِ مُنحنى $g(x)$ بيانيًّا أتّبعُ الإجراءاتِ الآتيةَ:

- أختارُ مجموعةً مِنَ النقاطِ تقعُ على مُنحنى $f(x) = x^2$.
- أضربُ الإحداثيَّ y للنقاطِ التي اخترتُها في 2.
- أُمَثِّلُ النقاطَ الجديدةَ في المُستوى الإحداثيِّ، ثمَّ أَصِلُ بينها بِمُنحنًى أملَسَ، كما يظهَرُ في الشكلِ المُجاورِ.



أتعلَّمُ

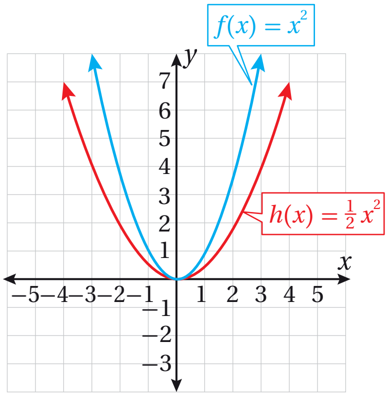
التمثيلُ البيانيُّ لِمُنحنى الاقترانِ g يبدو أضيقَ مِنَ التمثيلِ البيانيِّ لِمُنحنى الاقترانِ f؛ لأنَّهُ يتوسَّعُ رأسيًّا وليسَ أُفقيًّا.

② $h(x) = \frac{1}{2}x^2$

مُنحنى $h(x)$ هُوَ تضييقٌ لِمُنحنى $f(x) = x^2$ بِمعاملٍ مقدارُهُ $\frac{1}{2}$

لتمثيلِ مُنحنى $h(x)$ بيانيًّا أتَّبعُ الإجراءاتِ الآتيةَ:

- أختارُ مجموعةً مِنَ النقاطِ التي تقعُ على مُنحنى $f(x) = x^2$.
- أضربُ الإحداثيَّ y للنقاطِ التي اخترتُها في $\frac{1}{2}$.
- أُمَثِّلُ النقاطَ الجديدةَ فِي المُستوى الإحداثيِّ، ثمَّ أصِلُ بينها بِمُنحنًى أملَسَ، كما يظهَرُ فِي الشكلِ المُجاورِ.



أتحقَّق من فهمي

أَصِفُ كيفَ يرتبطُ مُنحنى كلِّ اقترانٍ ممّا يأتي بِمُنحنى الاقترانِ الرئيسِ $f(x) = x^2$، ثمَّ أُمَثِّلُهُ بيانيًّا:

a) $g(x) = 3x^2$

b) $g(x) = \frac{1}{3}x^2$

الانعكاسُ

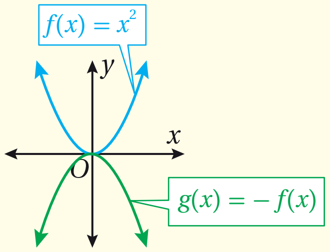
الانعكاسُ (reflection) هُوَ تحويلٌ هندسيٌّ يعكِسُ مُنحنى الاقترانِ حولَ مُستقيمٍ مُحَدَّدٍ.

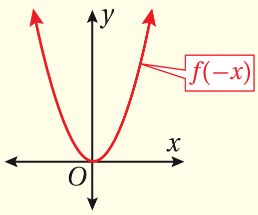
مفهومٌ أساسيٌّ

الانعكاسُ

إذا كانَ $f(x) = x^2$ فإنَّ:

- مُنحنى $g(x) = -f(x)$، هُوَ انعكاسٌ لِمُنحنى $f(x)$ حولَ المحورِ x.
- مُنحنى $g(x) = f(-x)$، هُوَ انعكاسٌ لِمُنحنى $f(x)$ حولَ المحورِ y.





أتعلَّمُ

انعكاسُ الاقترانِ $f(x) = x^2$ حولَ المحورِ y يُعطي الاقترانَ نفسَهُ؛ لأنَّ:

$f(-x) = (-x)^2 = x^2$

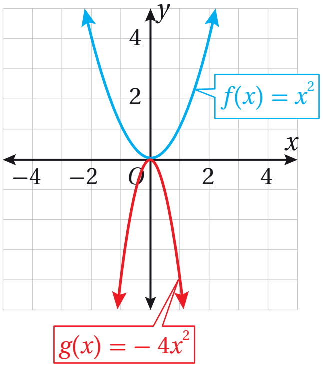
مثال 4

أَصِفُ كيفَ يرتبطُ مُنحنى كلِّ اقترانٍ ممّا يأتي بِمُنحنى الاقترانِ الرئيسِ $f(x) = x^2$، ثمَّ أُمَثِّلُهُ بيانيًّا:

① $g(x) = -4x^2$

مُنحنى $g(x)$ هُوَ انعكاسٌ لِمُنحنى $f(x) = x^2$ حولَ المحورِ x، ثمَّ توسيعٌ رأسيٌّ بِمعاملٍ مقدارُهُ 4

لتمثيلِ مُنحنى $g(x)$ بيانيًّا أتّبعُ الإجراءاتِ الآتيةَ:



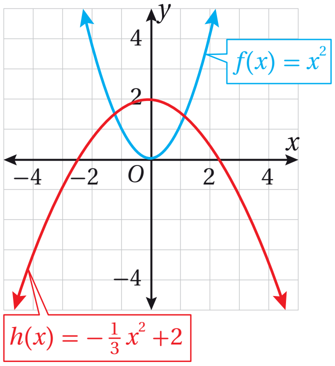
- أختارُ مجموعةً مِنَ النقاطِ تقعُ على مُنحنى $f(x) = x^2$.
- أضربُ الإحداثيَّ y للنقاطِ التي اخترتُها في -4
- أُمَثِّلُ النقاطَ الجديدةَ فِي المُستوَى الإحداثيِّ، ثمَّ أَصِلُ بينها بمُنحنًى أملَسَ، كما يظهَرَ فِي الشكلِ المُجاورِ.

② $h(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2$

مُنحنى $h(x)$ هُوَ انعكاسٌ لمُنحنى $f(x) = x^2$ حولَ المحورِ x، ثمَّ تضيقٌ رأسيٌّ بِمعاملٍ مقدارُهُ $\frac{1}{3}$، ثمَّ انسحابُ وحدَتَيْنِ إلَى الأعلى.

لتمثيلِ مُنحنى $h(x)$ بيانيًّا أتّبعُ الإجراءاتِ الآتيةَ:

- أختارُ مجموعةً مِنَ النقاطِ التي تقعُ على مُنحنى $f(x) = x^2$.
- أضربُ الإحداثيَّ y للنقاطِ التي اخترتُها في $-\frac{1}{3}$
- أُضيفُ 2 إلى الإحداثيِّ y للنقاطِ الناتجةِ مِنَ الخُطوةِ السابقةِ.
- أُمَثِّلُ النقاطَ مِنَ الخُطوةِ السابقةِ فِي المُستوى الإحداثيِّ، ثمَّ أَصِلُ بينها بِمُنحنًى أملَسَ، كما يظهَرُ فِي الشكلِ المُجاورِ.



أتحقَّق من فهمي

أَصِفُ كيفَ يرتبطُ مُنحنى كلِّ اقترانٍ ممّا يأتي بِمُنحنى الاقترانِ الرئيسِ $f(x) = x^2$، ثمّ أُمَثِّلُهُ بيانيًّا:

a) $g(x) = -\frac{1}{2}x^2$

b) $g(x) = -x^2 - 4$

كتابةُ التحويلِ الهندسيِّ للاقترانِ التربيعيِّ

تُسمّى الصيغةُ $f(x) = a(x-h)^2 + k$ **صيغةَ الرأسِ** (vertex form) للاقترانِ التربيعيِّ؛ حيثُ $a \neq 0$ وَ (h, k) هُوَ رأسُ القطعِ المُكافِئِ، ويمكنُ استعمالُها لكتابةِ قاعدةِ الاقترانِ التربيعيِّ الناتجِ مِنْ تطبيقِ تحويلٍ هندسيٍّ أوْ أكثرَ على الاقترانِ التربيعيِّ الرئيسِ، بحيثُ يُمَثِّلُ h الانسحابَ الأفقيَّ، وَيُمَثِّلُ k الانسحابَ الرأسيَّ، أمّا a فَيُمَثِّلُ الانعكاسَ والتمدُّدَ الرأسيَّ.

أتعلَّم

سُمِّيَتِ الصيغةُ $f(x) = a(x-h)^2 + k$ بصيغةِ الرأسِ للاقترانِ التربيعيِّ؛ لأنَّهُ يمكنُ مِنْ خلالِها تحديدُ الرأسِ بسهولةٍ.

$$f(x) = a(x-h)^2 + k$$

الانسحابُ الرأسيُّ

الانعكاسُ والتمدُّدُ الرأسيُّ

الانسحابُ الأفقيُّ

مثال 5

إذا كانَ مُنحنى الاقترانِ $g(x)$ ناتجًا مِنَ انعكاسِ مُنحنى الاقترانِ الرئيسِ $f(x) = x^2$ حولَ المحورِ x، ثمَّ توسيعٍ رأسيٍّ بِمعاملٍ مقدارُهُ 2، ثمَّ انسحابٍ إلَى اليسارِ بِمقدارِ وحدتَيْنِ، ثمَّ انسحابٍ إلَى الأعلى بِمقدارِ 3 وحداتٍ، فَأُجيبُ عَنِ الأسئلةِ الآتيةِ:

1 أكتبُ قاعدةَ الاقترانِ $g(x)$ باستعمالِ صيغةِ الرأسِ.

- بما أنَّ الانعكاسَ حولَ المحورِ x، ومعاملَ التوسيعِ الرأسيِّ 2، فإنَّ: $a = -2$
- بما أنَّ الانسحابَ الأفقيَّ إلَى اليسارِ بِمقدارِ 2، فإنَّ: $h = -2$
- بما أنَّ الانسحابَ الرأسيَّ إلَى الأعلى بِمقدارِ 4، فإنَّ: $k = 3$

أتعلَّم

أستعملُ الإشارةَ السالبةَ للدَّلالةِ على الانعكاسِ حولَ المحورِ x، والانسحابِ إلَى اليسارِ وإلَى الأسفلِ.

صيغةُ الرأسِ للاقترانِ التربيعيِّ $g(x) = a(x-h)^2 + k$

بتعويضِ $a = -2, h = -2, k = 3$ $\quad = -2(x-(-2))^2 + 3$

بالتبسيطِ $\quad = -2(x+2)^2 + 3$

2 **أَجِدُ إحداثِيَّي رأسِ القطعِ، ومُعادلةَ محورِ التَّماثُلِ، والقيمةَ العُظمى أوِ الصُّغرى للاقترانِ $g(x)$.**

بما أنَّ $g(x) = -2(x+2)^2 + 3$، فإنَّ:

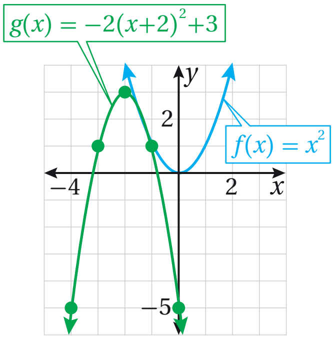
- رأسُ القطعِ $(-2, 3)$
- مُعادلةُ محورِ التماثلِ $x = -2$
- القيمةُ العُظمى 3

أتذكَّرُ

بمـا أنَّ $a < 0$، فإنَّ رأسَ القطعِ المُكافِئِ يُمَثِّلُ نقطةَ القيمةِ العُظمى.

3 **أُمَثِّلُ الاقترانَ $g(x)$ بيانيًّا.**

يُمكِنُني استعمالُ التحويلاتِ الهندسيَّةِ لتمثيلِ مُنحنى الاقترانِ، كما في الشكلِ المُجاورِ.



أتحقَّقُ من فهمي

إذا كانَ مُنحنى الاقترانِ $g(x)$ ناتجًا مِنَ انعكاسِ مُنحنى الاقترانِ الرئيسِ $f(x) = x^2$ حولَ المحورِ x، ثمَّ تضييقٍ رأسيٍّ بِمعاملٍ مقدارُهُ $\frac{1}{2}$، ثمَّ انسحابٍ إلَى اليمينِ بِمقدارِ 3 وحداتٍ، ثمَّ انسحابٍ إلَى الأسفلِ بِمقدارِ 5 وحداتٍ، فَأُجيبُ عَنِ الأسئلةِ الآتيةِ:

a) أكتبُ قاعدةَ الاقترانِ $g(x)$ باستعمالِ صيغةِ الرأسِ.

b) أَجِدُ إحداثِيَّي رأسِ القطعِ، ومُعادلةَ محورِ التَّماثُلِ، والقيمةَ العُظمى أوِ الصُّغرى للاقترانِ $g(x)$.

c) أُمَثِّلُ الاقترانَ $g(x)$ بيانيًّا.

أتدرّب وأحلُّ المسائل

أَصِفُ كيفَ يرتبطُ مُنحنى كلِّ اقترانٍ ممّا يأتي بمُنحنى الاقترانِ الرئيسِ $f(x) = x^2$، ثمَّ أُمَثِّلُهُ بيانيًّا:

1 $h(x) = x^2 + 5$

2 $g(x) = x^2 - 6$

3 $h(x) = (x - 2)^2$

4 $g(x) = (x + 1)^2$

5 $v(x) = (x - 1)^2 + 3$

6 $u(x) = (x + 2)^2 - 4$

7 $l(x) = \frac{1}{4}x^2$

8 $m(x) = 2x^2 - 3$

9 $h(x) = -\frac{1}{3}x^2 - 1$

10 $g(x) = -4(x + 2)^2 + 3$

11 $p(x) = (x - 7)^2 + 1$

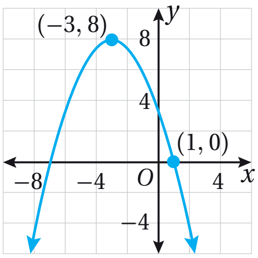
12 $t(x) = 2(x - 3)^2 - 10$

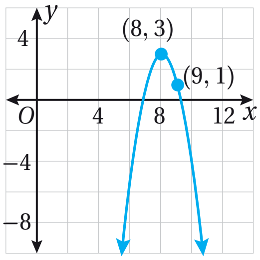
أَصِلُ الاقترانَ بتمثيلِهِ البيانيِّ في كلٍّ ممّا يأتي:

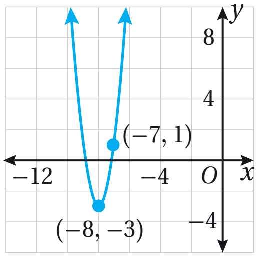
13 $a(x) = 4(x + 8)^2 - 3$

14 $b(x) = -2(x - 8)^2 + 3$

15 $c(x) = -\frac{1}{2}(x+3)^2+8$







إذا كانَ مُنحنى الاقترانِ $g(x)$ ناتجًا مِنَ انعكاسِ مُنحنى الاقترانِ الرئيسِ $f(x) = x^2$ حولَ المحورِ x، ثمَّ توسيعٍ رأسيٍّ بِمعاملٍ مقدارُهُ 4، ثمَّ انسحابٍ إلَى الأعلى بِمقدارِ وحدتَيْنِ، فَأُجيبُ عنِ الأسئلةِ الآتيةِ:

16 أكتبُ قاعدةَ الاقترانِ $g(x)$ باستعمالِ صيغةِ الرأسِ.

17 أَجِدُ إحداثِيَّي رأسِ القطعِ، ومُعادلةَ محورِ التَّماثلِ، والقيمةَ العُظمى أوِ الصُّغرى للاقترانِ $g(x)$.

18 أُمَثِّلُ الاقترانَ $g(x)$ بيانيًّا.

آليــاتٌ ثقيلةٌ: يُمَثِّلُ الاقترانُ $l(t) = -t^2 + 200$ العلاقةَ بينَ عددِ لتراتِ الوقودِ $l(t)$ المُتبقيةِ في خزّانِ آليَّةٍ ثقيلةٍ والزمنِ t بالساعاتِ خلالَ فترةِ عملِها؛ حيثُ $t \geq 0$.

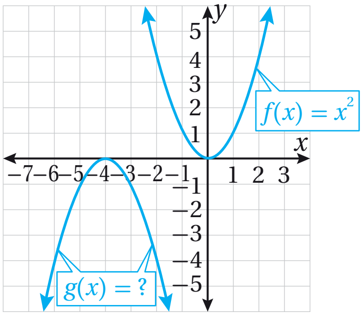
19 ماذا تُمَثِّلُ نقطةُ رأسِ القطعِ المُكافِئِ في سياقِ المسألةِ؟ أُبَرِّرُ إجابتي.

20 هلْ يمكنُ أنْ يكونَ معاملُ t^2 موجبًا في مواقفَ حياتيَّةٍ مشابهةٍ؟ أُبَرِّرُ إجابتي.

21 أَصِفُ العلاقةَ بينَ مُنحنى الاقترانِ $l(t)$، وَمُنحنى الاقترانِ الأصليِّ $f(t) = t^2$.

مهارات التفكير العليا

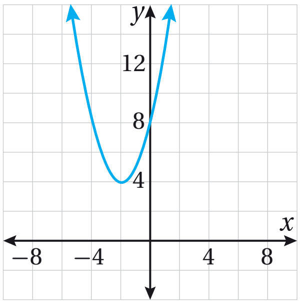
تبريرٌ: فِي الشكلِ الآتي، إذا كانَ مُنحنى الاقترانِ g ناتجًا مِنْ تحويلٍ هندسيٍّ أوْ أكثرَ لِمُنحنى الاقترانِ f، فَأُجيبُ عَنِ الأسئلةِ الآتيةِ:



22 أَصِفُ التحويلاتِ الهندسيَّةَ التي مَرَّ بها مُنحنى الاقترانِ f لينتجَ الاقترانُ g، مُبَرِّرًا إجابتي.

23 أكتبُ قاعدةَ الاقترانِ g بصيغةِ الرأسِ.

24 **تَحَدٍّ:** أكتبُ بصيغةِ الرأسِ قاعدةَ الاقترانِ المُمَثَّلِ بيانيًّا فِي الشكلِ الآتي.



اختبار نهاية الوحدة

أختارُ رمزَ الإجابةِ الصحيحةِ لكلٍّ ممّا يأتي:

1 مجالُ العلاقةِ: $\{(3, 5), (2, -2), (1, 5), (0, -2), (1, 2)\}$: هُوَ:

a) $\{0, 1, 2, 3\}$ b) $\{-2, 2, 5\}$

c) $\{0, 2, 3\}$ d) $\{-2, 0, 1\}$

2 إذا كانَ $f(x) = x^2 + 2x - 3$، فإنَّ $f(1)$ تُساوي:

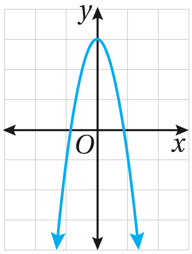
a) -3 b) -1 c) 0 d) 3

3 مُعادلةُ محورِ التَّماثُلِ للاقترانِ $y = x^2 - 10x + 1$:

a) $y = 5$ b) $x = 10$

c) $x = 5$ d) $x = -5$

4 أيُّ الاقتراناتِ الآتيةِ يُعبِّرُ عَنِ المُنحنى المُمَثَّلِ بيانيًّا؟



a) $y = -4x^2$ b) $y = -4x^2 + 3$

c) $y = x^2 + 3$ d) $y = 1 - 4x^2$

5 إحداثيّا نقطةِ رأسِ القطعِ المُكافِئِ للاقترانِ التربيعيِّ
$y = x^2 + 2x + 3$

a) $(0, 3)$ b) $(2, 11)$

c) $(1, 6)$ d) $(-1, 2)$

أُحَدِّدُ مجالَ كلِّ علاقةٍ ممّا يأتي وَمَداها، ثمَّ أُحَدِّدُ ما إذا كانتْ تُمَثِّلُ اقترانًا أمْ لا:

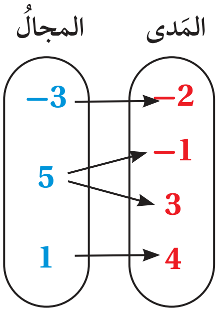
6 $\{(-1, 6), (4, 2), (2, 36), (1, 6)\}$

7 $\{(5, -4), (-2, 3), (5, -1), (2, 3)\}$

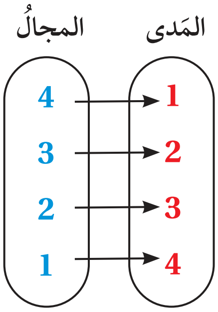
8

x	-4	-2	0	3
y	-2	1	2	1

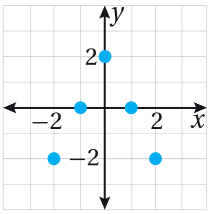
9



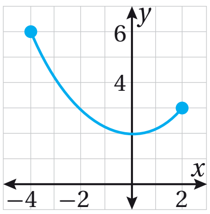
10



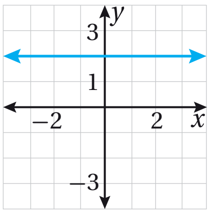
11



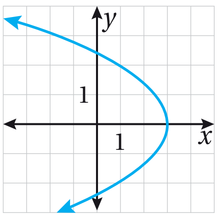
12



13



14



15 **كــرةٌ:** رَكَلَ خليلٌ كــرةً عَنْ سـطحِ الأرضِ. إذا كانَتِ العلاقـةُ بينَ ارتفاعِ الكرةِ عَنْ سـطحِ الأرضِ h بالمترِ والزمنِ t بالثواني مُعطاةً بالاقترانِ $h = -5t^2 + 17t$، فَأَجِدُ أقصى ارتفاعٍ تَصِلُهُ الكـرةُ والزمنَ الذي تحتاجُ إليهِ حتى تَصِلَ إلى أقصى ارتفاعٍ.

اختبار نهاية الوحدة

أَجِدُ رأسَ، ومُعادلةَ محورِ التّماثُلِ، والقيمةَ العُظمى أوِ الصُّغرى، ومجالَ الاقتراناتِ التربيعيَّةِ الآتيةِ وَمَداها، ثمَّ أُمَثِّلُهُ بيانيًّا:

16 $f(x) = 2x^2 + 12x + 4$

17 $f(x) = -8x^2 - 16x - 9$

18 $f(x) = 3x^2 - 18x + 15$

19 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 11x + 6$

أَصِفُ كيفَ يرتبطُ مُنحنى كلِّ اقترانٍ ممّا يأتي بِمُنحنى الاقترانِ الرئيسِ $f(x) = x^2$، ثمَّ أُمَثِّلُهُ بيانيًّا:

20 $p(x) = 4(x - 6)^2 - 9$

21 $p(x) = \frac{1}{2}(x + 8)^2$

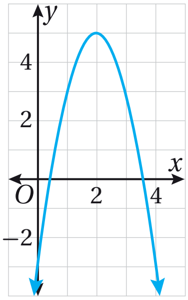
22 $t(x) = -3x^2 + 5$

23 $h(x) = (x + 5)^5$

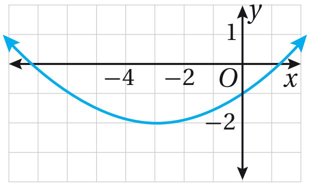
24 $g(x) = -(x + 4)^2 - 3$

أَجِدُ رأسَ، ومُعادلةَ محورِ التّماثُلِ، والقيمةَ العُظمى أوِ الصُّغرى، ومجالَ كلٍّ مِنَ القطوعِ المُكافِئةِ الآتيةِ وَمَداها:

25



26



قذيفةٌ: يُمَثِّلُ الاقترانُ $h(t) = -16(t - 6)^2 + 576$ ارتفاعَ قذيفةٍ عَنْ سطحِ الأرضِ بالأمتارِ، بعدَ t ثانيةً مِنْ قذفِها.

27 أَجِدُ ارتفاعَ الكرةِ بعدَ 4 ثوانٍ مِنْ ركلِها.

28 أَجِدُ أقصى ارتفاعٍ تَصِلُ إليهِ الكرةُ.

29 أَصِفُ علاقةَ مُنحنى الاقترانِ $h(t)$ بمُنحنى الاقترانِ $f(t) = t^2$.

تدريب على الاختبارات الدولية

30 التحويلانِ اللذانِ أثَّرا في مُنحنى الاقترانِ $f(x) = x^2$ للحصولِ على مُنحنى الاقترانِ $h(x) = 2(x-3)^2$، هُما:

a) تضييقٌ رأسيٌّ وانسحابُ 3 وحداتٍ إلَى اليمينِ.

b) تضييقٌ رأسيٌّ وانسحابُ 3 وحداتٍ إلَى اليسارِ.

c) توسيعٌ رأسيٌّ وانسحابُ 3 وحداتٍ إلَى اليسارِ.

d) توسيعٌ رأسيٌّ وانسحابُ 3 وحداتٍ إلَى اليمينِ.

31 مدى الاقترانِ التربيعيِّ $f(x) = 12x - 3x^2 + 3$

a) $\{y : y \leq 15\}$

b) $\{y : y \geq 15\}$

c) $\{y : y \leq 3\}$

d) $\{y : y \geq 3\}$

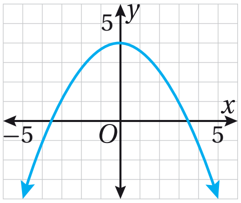
32 أيُّ الاقتراناتِ الآتيةِ تُمَثِّلُ القطعَ المُكافِئَ في الشكلِ أدناهُ؟

a) $y = -\frac{1}{3}x^2 - 4$

b) $y = -\frac{1}{3}x^2 + 4$

c) $y = -3x^2 - 4$

d) $y = 3x^2 + 4$



الوحدة
3

حلُّ المُعادلات
Solving Equations

ما أهميَّةُ هذهِ الوحدةِ؟

تُستعمَلُ المُعادلات كثيرًا لنمذجةِ حركةِ الأجسام فِي المواقفِ الحياتيَّةِ والعلميَّة، ويمكنُ مِنْ خلالِ حلِّ تلكَ المُعادلاتِ تحديدُ قِيَمٍ مهمَّةٍ في هذهِ المواقفِ، مثلِ: تحديدِ زمنِ تحليقِ الجسمِ المقذوفِ قبلَ ارتطامِهِ بالأرضِ، أوِ المسافةِ الأُفقيَّةِ التي تقطعُها الدلافينُ عندَ قفزِها خارجَ الماءِ.

تعلَّمتُ سابقًا:

- ✓ تحليلَ المقاديرِ الجبريَّـــةِ بإخراجِ العاملِ المُشترَكِ الأكبرِ وتجميعَ الحدود.
- ✓ تحليلَ الفرقِ بينَ مُرَبَّعي حدَّيْنِ، وتحليلَ ثلاثيِّ الحدودِ علَى الصورةِ $x^2 + bx + c$
- ✓ التَّمثيلَ البيانيَّ لِمُنحنى الاقترانِ التربيعيِّ.

سأتعلَّمُ في هذهِ الوحدةِ:

- حلَّ المُعادلةِ التربيعيَّة بيانيًّا.
- حلَّ المُعادلةِ التربيعيَّة بالتحليلِ.
- حلَّ المُعادلةِ التربيعيَّة بإكمالِ المُرَبَّع.
- حلَّ المُعادلةِ التربيعيَّة باستعمالِ القانونِ العامِّ.

أســتعمل تدريبات (أستعد لدراســة الوحدة) في الصفحات (6 و 7 و 8) من كتاب التمارين؛ لمراجعة هذه الموضوعات قبل البدء بدراسة الوحدة.

الدرس

1

حلُّ المُعادلاتِ التربيعيَّة بيانِيًّا

Solving Quadratic Equations by Graphing

فكرة الدرس حلُّ المُعادلةِ التربيعيَّةِ بيانيًّا.

المصطلحات المُعادلةُ التربيعيَّةُ، جذورُ المُعادلةِ، أصفارُ الاقترانِ.

مسألة اليوم يُمَثِّلُ الاقترانُ $h(t) = -5t^2 + 10t$ ارتفاعَ دولفينٍ بالمترِ فوقَ سطحِ الماءِ بعدَ t ثانيةً مِنْ ظهورِهِ فوقَ هذا السطحِ. كمْ ثانيةً يبقى الدولفينُ خارجَ الماءِ؟

حلُّ المُعادلةِ التربيعيَّةِ بيانيًّا

المُعادلةُ التربيعيَّةُ (quadratic equation) مُعادلةٌ غيرُ خطيَّةٍ يمكنُ كتابتُها علَى الصورةِ: $ax^2 + bx + c = 0$، حيث $a \neq 0$، التي تُسَمَّى الصورةَ القياسيَّةَ للمُعادلةِ التربيعيَّةِ، ولكلِّ اقترانٍ تربيعيٍّ مُعادلةٌ تربيعيَّةٌ مُرتبطةٌ بِهِ يمكنُ الحصولُ عليها باستبدالِ العددِ صفرٍ بـ $f(x)$.

المُعادلةُ التربيعيَّةُ المُرتبطةُ بالاقترانِ	الاقترانُ التربيعيُّ
$2x^2 - 3x + 8 = 0$	$f(x) = 2x^2 - 3x + 8$

يمكنُ حلُّ المُعادلةِ التربيعيَّةِ بتحديدِ القِيَمِ التي يقطعُ عندها منحنى الاقترانِ المُرتبط المحورَ x، وَتُسَمّى تلكَ القِيَمُ **جذورَ المُعادلةِ** (roots of the equation) أو **أصفارَ الاقترانِ** (zeros of the function)، ويمكنُ أنْ يكونَ للمُعادلةِ التربيعيَّةِ حلّانِ حقيقيانِ مختلفانِ، أوْ حلٌّ حقيقيٌّ واحدٌ، أوْ ألّا يكونَ لها حلولٌ حقيقيَّةٌ.

يمكنُ حلُّ المُعادلةِ التربيعيَّةِ باتِّباعِ الخُطواتِ الآتيةِ:

مفهومٌ أساسيٌّ

حلُّ المُعادلةِ التربيعيَّةِ بيانيًّا

لحلِّ المُعادلاتِ التربيعيَّةِ بيانيًّا أتَّبعُ الخُطواتِ الآتيةَ:

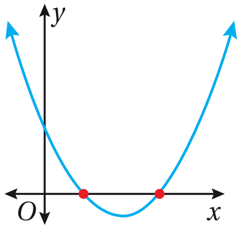
الخُطوة 1: أكتبُ المُعادلةَ بالصورةِ القياسيَّةِ $ax^2 + bx + c = 0$

الخُطوة 2: أُمَثِّلُ بيانيًّا الاقترانَ المُرتبطَ $f(x) = ax^2 + bx + c$

الخُطوة 3: أَجِدُ القِيَمَ التي يقطعُ عندها المنحنى المحورَ x، إنْ وُجِدَتْ، وَهِيَ أصفارُ الاقترانِ المُرتبطِ، التي تُعَدُّ حلولَ المُعادلةِ

حلُّ المُعادلةِ التربيعيّةِ بيانيًّا: حلّانِ حقيقيانِ مختلفانِ

يكونُ للمُعادلةِ التربيعيَّةِ حلّانِ حقيقيانِ، إذا قطعَ منحنى الاقترانِ المُرتبطِ المحورَ x في نقطتَيْنِ، كما فِي الشكلِ المُجاورِ.



مثال 1

أَحُلُّ المُعادلةَ $x^2 + 2x = 3$ بيانيًّا.

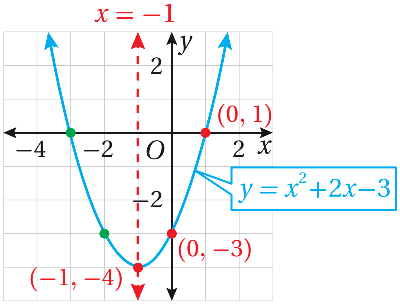
الخُطوةُ 1: أكتبُ المُعادلةَ بالصورةِ القياسيَّةِ، ثمَّ أكتبُ الاقترانَ المُرتبطَ بالمُعادلةِ.

$$x^2 + 2x = 3$$ المُعادلةُ المُعطاةُ

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$ بطرحِ 3 مِنْ طَرَفَي المُعادلةِ

إذنْ، الاقترانُ المُرتبطُ بالمُعادلةِ: $f(x) = x^2 + 2x - 3$

الخُطوةُ 2: أُمَثِّلُ الاقترانَ المُرتبطَ بالمُعادلةِ بيانيًّا.



- بما أنَّ $a > 0$، فالتمثيلُ البيانيُّ للقطعِ المُكافِئِ يكونُ مفتوحًا للأعلى.
- مُعادلةُ محورِ التَّماثُلِ: $x = -1$
- إحداثيّا الرأسِ: $(-1, -4)$
- نقطةُ تقاطعِ الاقترانِ معَ المحورِ y، هِيَ: $(0, -3)$، ونقطةٌ أُخرى فِي الجهةِ نفسِها: $(1, 0)$.
- أُمَثِّلُ الرأسَ والنقطتَيْنِ فِي المُستوى الإحداثيِّ، ثمَّ أستعملُ التَّماثُلَ لأعكِسَهُما.

أتذكَّرُ

مُعادلةُ محورِ التَّماثُلِ لمنحنى الاقترانِ التربيعيِّ $f(x) = ax^2 + bx + c$؛ حيثُ $a \neq 0$ هي $x = -\frac{b}{2a}$، وإحداثيّا رأسِهِ $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$.

الخُطوةُ 3: أَجِدُ القِيَمَ التي يقطعُ عندها المنحنى المحورَ x.

يقطعُ المنحنى محورَ x عندَ $-3, 1$

إذنْ، للمُعادلةِ جذرانِ، هُما: $-3, 1$

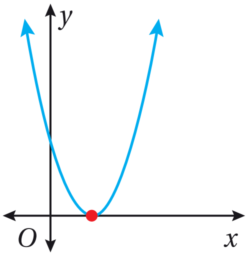
التحقُّقُ: أتحقَّقُ مِنْ صِحَّةِ كلٍّ مِنَ الحلَّيْنِ بالتعويضِ فِي المُعادلةِ الأصليَّةِ.

$x^2 + 2x = 3$	المُعادلةُ المُعطاةُ	$x^2 + 2x = 3$
$(1)^2 + 2(1) \overset{?}{=} 3$	بالتعويضِ $x = -3$ or $x = 1$	$(-3)^2 + 2(-3) \overset{?}{=} 3$
$3 = 3$ ✓	بالتبسيطِ	$3 = 3$ ✓

أتحقَّق من فهمي

أَحُلُّ المُعادلةَ $2x^2 - 2 = 0$ بيانيًّا.

حلُّ المُعادلةِ التربيعيَّةِ بيانيًّا: حلٌّ حقيقيٌّ واحدٌ.



يكونُ للمُعادلةِ التربيعيَّةِ حلٌّ حقيقيٌّ واحدٌ إذا قطعَ منحنى الاقترانِ المُرتبطِ المحورَ x في نقطةٍ واحدةٍ فقط، كما في الشكلِ المُجاورِ.

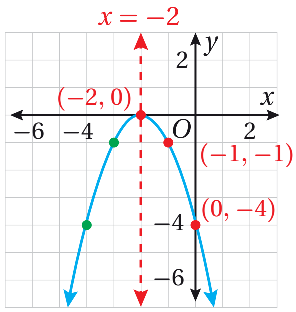
مثال 2

أَحُلُّ المُعادلةَ $-x^2 - 4x - 4 = 0$ بيانيًّا.

الخُطوةُ 1: أكتبُ المُعادلةَ بالصورةِ القياسيَّةِ، ثمَّ أكتبُ الاقترانَ المُرتبطَ بالمُعادلةِ.

أُلاحِظُ أنَّ المُعادلةَ مكتوبةٌ بالصورةِ القياسيَّةِ. إذنْ، الاقترانُ المُرتبطُ بالمُعادلةِ:

$$f(x) = -x^2 - 4x - 4$$



الخُطوةُ 2: أُمَثِّلُ الاقترانَ المُرتبطَ بالمُعادلةِ بيانيًّا.

- بما أنَّ $a < 0$، فالتمثيلُ البيانيُّ للقطعِ المُكافِئِ يكونُ مفتوحًا للأسفلِ.
- مُعادلةُ محورِ التَّماثُلِ: $x = -2$
- إحداثيّا الرأسِ: $(-2, 0)$
- نقطةُ تقاطعِ الاقترانِ معَ المحورِ y، هِيَ: $(0, -4)$، ونقطةٌ أُخرى فِي الجهةِ نفسِها: $(-1, -1)$.
- أُمَثِّلُ الرأسَ والنقطتَيْنِ فِي المُستوى الإحداثِيِّ، ثمَّ أستعملُ التَّماثُلَ لأعكِسَهُما.

الخُطوةُ 3: أجِدُ القِيَمَ التي يقطعُ عندها المنحنى المحورَ x.

يقطعُ المنحنى المحورَ x عندَ -2

إذنْ، للمُعادلةِ جذرٌ وحيدٌ، هُوَ: $x = -2$

أتعلَّم

أُلاحِظُ أنَّ الإحداثيَّ x لرأسِ القطعِ هُوَ حلُّ المُعادلةِ الوحيدُ.

التحقُّقُ: أتحقَّقُ مِنْ صِحَّةِ كلٍّ مِنَ الحلَّيْنِ بالتعويضِ فِي المُعادلةِ الأصليَّةِ.

المُعادلةُ المُعطاةُ $-x^2 - 4x - 4 = 0$

بالتعويضِ $x = -2$ $-(-2)^2 - 4(-2) - 4 \overset{?}{=} 0$

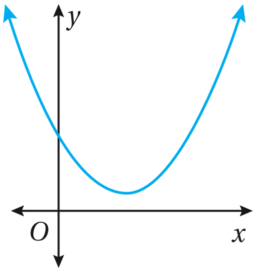
بالتبسيطِ $0 = 0$ ✓

أتحقَّق من فهمي

أَحُلُّ المُعادلةَ $x^2 - 8x = -16$ بيانيًّا.

حلُّ المُعادلةِ التربيعيَّةِ بيانيًّا: لا توجدُ حلولٌ حقيقيَّةٌ.

لا يكونُ للمُعادلةِ التربيعيَّةِ حلٌّ حقيقيٌّ إذا لَمْ يقطَعْ منحنى الاقترانِ المُرتبطِ بالمُعادلةِ التربيعيَّةِ المحورَ x، كما في الشكلِ المُجاورِ.



مثال 3

أَحُلُّ المُعادلةَ $x^2 + 2x + 4 = 0$ بيانيًّا.

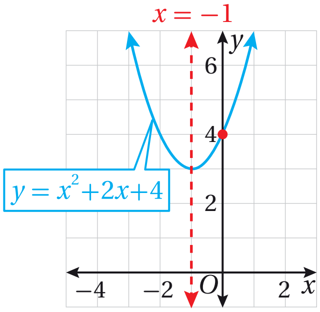
الخُطوةُ 1: أكتبُ المُعادلةَ بالصورةِ القياسيَّةِ، ثمَّ أكتبُ الاقترانَ المُرتبطَ بالمُعادلةِ.

أُلاحِظُ أنَّ المُعادلةَ مكتوبةٌ بالصورةِ القياسيَّةِ. إذنْ، الاقترانُ المُرتبطُ بالمُعادلةِ:

$$f(x) = x^2 + 2x + 4$$

الخُطوةُ 2: أُمَثِّلُ الاقترانَ المُرتبطَ بالمُعادلةِ بيانيًّا.

- بما أنَّ $a > 0$، فالتمثيلُ البيانيُّ للقطعِ المُكافِئِ يكونُ مفتوحًا للأعلى.
- مُعادلةُ محورِ التَّماثُلِ: $x = -1$
- إحداثيَّا الرأسِ: $(-1, 3)$
- نقطةُ تقاطعِ الاقترانِ معَ المحورِ y، هِيَ: $(0, 4)$، ونقطةٌ أُخرى فِي الجهةِ نفسِها: $(1, 7)$.
- أُمَثِّلُ الرأسَ والنقطتَيْنِ فِي المُستوى الإحداثيِّ، ثمَّ أستعملُ التَّماثُلَ لأعكِسَهُما.



الخُطوة 3: أَجِدُ القِيَمَ التي يقطعُ عندها المنحنى المحورَ x.

أُلاحِظُ أنَّ التمثيلَ البيانيَّ للاقترانِ المُرتبطِ لا يقطعُ المحورَ x.

إذنْ، لا يوجدُ جذرٌ حقيقيٌّ للمُعادلةِ.

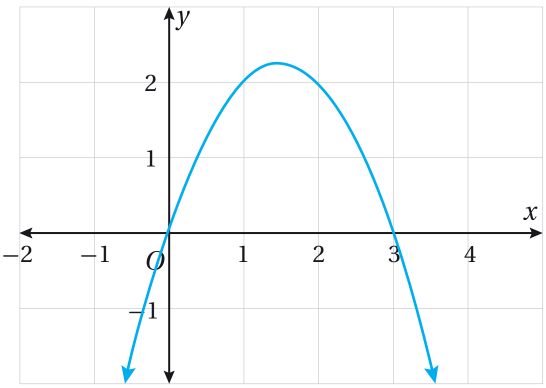
أتحقَّق من فهمي

أَحُلُّ المُعادلةَ $x^2 + 5 = 4x$ بيانيًّا.

يأخذُ مسارُ بعضِ المقذوفاتِ شكلَ القطعِ المُكافِئِ؛ لِذا يمكنُ استعمالُ خصائصِ الاقتراناتِ التربيعيَّةِ لتحديدِ زمنِ بقاءِ المقذوفِ فِي الهواءِ والمسافةِ الأفقيَّةِ التي يقطعُها.

مثال 4 : من الحياة

نوافيـرُ: يُمَثِّلُ الاقترانُ $h(t) = 3t - t^2$ ارتفاعَ الماءِ المُتَدَفِّقِ مِـنْ فُوَّهَةِ نافورةٍ بالأمتارِ عندما يكونُ على بُعدِ t مترًا مِنَ الفُوَّهَةِ. أستعملُ التمثيلَ البيانيَّ لِأَجِدَ زمنَ بقاءِ قطرةِ ماءٍ فِي الهواءِ.



يكونُ ارتفـاعُ قطرةِ الماءِ عندَ خُروجِها مِنْ فُوَّهَةِ النافورةِ 0 m، ويكونُ ارتفاعُها 0 m عندَ عودتِها إلى سـطحِ الأرضِ؛ لِذا فإنَّ زمنَ بقائِها فـي الهواءِ يقعُ بينَ النقطتَيْنِ اللَّتَيْـنِ يقطعُ عندَهُما منحنى الاقترانِ $h(t) = 3t - t^2$ المحورَ x.

أَحُلُّ المُعادلةَ $3t - t^2 = 0$ لِأُحَدِّدَ هاتَيْنِ القيمتَيْنِ.

الخُطوةُ 1: أُمَثِّلُ الاقترانَ $h(t) = 3t - t^2$ بيانيًّا.

الخُطوةُ 2: أَجِدُ القِيَمَ التي يقطعُ عندَها المنحنى الجزءَ الموجبَ مِنَ المحورِ x.

بما أنَّ المقطعَ x الموجبَ للاقترانِ هُوَ 3، فإنَّ زمنَ بقاءِ القطرةِ فِي الهواءِ 3 ثوانٍ.

معلومةٌ

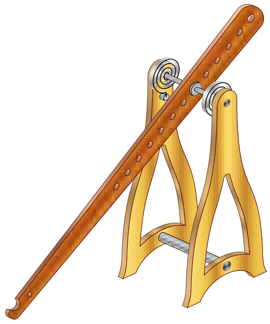
بـرعَ المهندسـونَ المسـلمونَ فِـي العصرِ الأندلسـيِّ فـي تصميمِ النوافيـرِ، وابتكـروا لها طرائقَ ميكانيكيَّـةً مُعَقَّدَةً لِضَـخِّ المـاءِ مِـنْ غيرِ مُحَرِّكاتٍ.

أُفَكِّرُ

لمـاذا اكْتُفِـيَ بتمثيـلِ الاقترانِ فـوقَ المحورِ x الموجبِ؟

أتحقَّق من فهمي

فيزياءُ: في تجربةٍ فيزيائيّةٍ، قَذَفَتْ صفاءُ كتلةً إلَى الأعلى، فَمَثَّلَ الاقترانُ $h(t) = -6t^2 + 12t$ ارتفاعَ هذهِ الكتلةِ بالأمتارِ، بعدَ t ثانيةً مِنْ قذفِها. أستعملُ التمثيلَ البيانيَّ لِأَجِدَ زمنَ بقاءِ الكتلةِ فِي الهواءِ.



أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أَحُلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ بيانيًّا:

1 $x^2 - 9 = 0$

2 $x^2 - 5x = 0$

3 $-12x^2 = 16$

4 $-x^2 + 12x - 36$

5 $x^2 - 6x + 9 = 0$

6 $x^2 - 6x = 7$

7 $x^2 + x - 6 = 0$

8 $x^2 = 6x - 8$

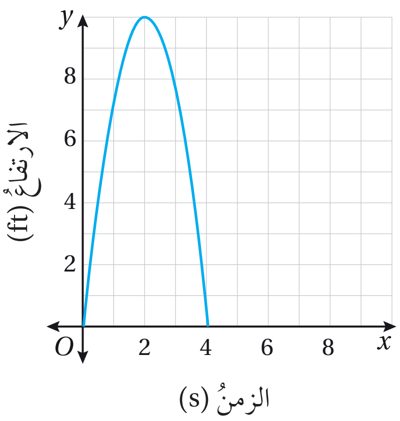
9 $-x^2 + 4 = 3x$

10 $x^2 + 3x + 6 = 0$

11 $2x^2 - 5x = -6$

12 $2x^2 + 32 = -20x$

رياضةٌ: يُبيِّنُ الشكلُ المُجاورُ ارتفاعَ لاعبِ جُمبازٍ h بالأقدامِ بعدَ t ثانيةً مِنْ وثبِهِ عَنْ سطحِ الأرضِ.



13 كمْ ثانيةً استمرَّ اللاعبُ فِي الهواءِ؟

14 ما أقصى ارتفاعٍ وصلَ إليهِ اللاعبُ؟

15 هلْ يُمَثِّلُ الاقترانُ $f(x) = -4x^2 + 8x$ حركةَ لاعبِ الجُمبازِ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

16 **طيورٌ:** التقطَ نَســرٌ سمكةً مِنْ بُحيرةٍ وطارَ بها، وعندما وصلَ إلى ارتفاعِ 25 m تمكّنَتِ السمكةُ مِنَ التَّحَرُّرِ لِتَســقُطَ مرّةً أُخرى فِي البُحيرة. إذا عَلِمْتُ أنَّ الاقترانَ $h(x) = \frac{3}{100}(-t^2 + 400)$ يُمَثِّلُ ارتفاعَ السمكةِ بالأمتارِ بعدَ t ثانيةً مِنْ ســقوطِها، فأســتعملُ التمثيلَ البيانيَّ لِأَجِدَ زمنَ بقاءِ السمكةِ فِي الهواءِ.

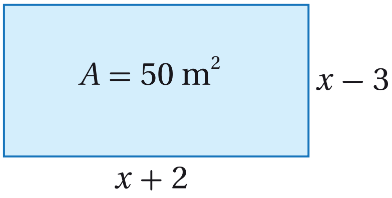
17 أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ.

مهارات التفكير العليا

18 **أكتشِفُ المُختلِفَ:** أيُّ المُعادلاتِ الآتيةِ مُختلِفَةٌ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

$x^2 - 2x - 3 = 0$	$x^2 - 6x + 8 = 0$
$x^2 + 5x - 6 = 0$	$x^2 + 2x - 3 = 0$

19 **تبرير:** يُبيِّنُ الشكلُ المُجاورُ مستطيلًا مساحتُهُ $50\ \text{m}^2$. أستعملُ التمثيلَ البيانيَّ لِأَجِدَ قيمةَ x، مُبرِّرًا إجابتي.



مسألةٌ مفتوحةٌ: أكتبُ مُعادلةً تحقِّقُ الوصفَ المُعطى في كلٍّ ممّا يأتي:

20 مُعادلةٌ تربيعيَّةٌ ليسَ لها جذرٌ حقيقيٌّ.

21 مُعادلةٌ تربيعيَّةٌ لها جذرٌ حقيقيٌّ واحدٌ.

22 مُعادلةٌ تربيعيَّةٌ لها جذرانِ صحيحانِ موجبانِ.

الدرس

2

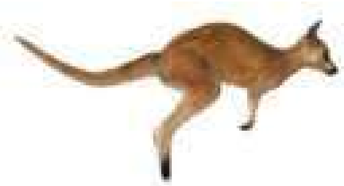
حلُّ المُعادلاتِ التربيعيَّةِ بالتحليلِ (1)

Solving Quadratic Equations by Factoring (1)

فكرة الدرس حلُّ المُعادلاتِ التربيعيَّةِ بالتحليلِ.

المصطلحات خاصيَّةُ الضَّربِ الصِّفريِّ.

مسألة اليوم يُمثِّلُ الاقترانُ $h(t) = -5t^2 + 7t$ ارتفاعَ كنغرٍ بالمترِ فوقَ سطحِ الأرضِ بعدَ t ثانيةً مِنْ قفزِهِ. كمْ ثانيةً تقريبًا يحتاجُ الكنغرُ ليعودَ إلى سطحِ الأرضِ؟



حلُّ المُعادلاتِ التربيعيَّةِ بالتحليلِ، وبخاصيَّةِ الضَّربِ الصِّفريِّ.

تعلَّمتُ في الدرسِ السابقِ حلَّ المُعادلاتِ التربيعيَّةِ بيانيًّا، وسأتعلَّمُ في هذا الدرسِ حلَّها جبريًّا.

أتأمَّلُ كُلًّا مِنَ الجُملِ الآتيةِ:

$$6\,(0) = 0 \qquad 0(-5) = 5 \qquad (7-7)(0) = 0$$

ألاحِظُ أنَّ أحدَ العامليْنِ على الأقلِّ في كلِّ حالةٍ ممّا سبقَ يُساوي صِفرًا، لِذا فإنَّ حاصلَ ضربِهِما يُساوي صِفرًا، وهذا ما يُسَمّى **بخاصيَّةِ الضَّربِ الصِّفريِّ** (zero–product property).

مفهومٌ أساسيٌّ **خاصيَّةُ الضَّربِ الصِّفريِّ**

بالكلماتِ: إذا كانَ حاصلُ ضربِ عددَيْنِ حقيقيَّيْنِ يُساوي صِفرًا، فإنَّ أحدَهُما على الأقلِّ يجبُ أنْ يكونَ صِفرًا.

بالرُّموزِ: إذا كانَ a وَ b عددَيْنِ حقيقيَّيْنِ، وكانَ $ab = 0$، فإنَّ:

$$a = 0 \quad \text{or} \quad b = 0$$

يمكنُ استعمالُ خاصيَّةِ الضَّربِ الصِّفريِّ والتحليلِ لحلِّ المُعادلاتِ التربيعيَّةِ، فإذا كانَ أحدُ طرفيْ مُعادلةٍ مكتوبًا بالصورةِ التحليليَّةِ، والطرفُ الآخرُ هُوَ 0، فيمكنُ استعمالُ خاصيَّةِ الضَّربِ الصِّفريِّ لحلِّها.

أتذكَّرُ

كتابةُ مقدارٍ جبريٍّ بالصورةِ التحليليَّةِ يعني تحليلَهُ تحليلًا كاملًا.

أمثلةٌ:

$x^2 + 5x = x\,(x+5)$

$x^2 + 3x + 2 =$

$(x+2)(x+1)$

مفهومٌ أساسيٌّ

حلُّ المُعادلةِ التربيعيَّةِ بالتحليلِ

لحلِّ المُعادلاتِ التربيعيَّةِ بالتحليلِ، أتَّبعُ الخُطواتِ الآتيةَ:

الخُطوةُ 1: أنقلُ جميعَ الحدودِ إلَى الطرفِ الأيسرِ مِنَ المُعادلةِ، وأتركُ الصِّفرَ فِي الطرفِ الأيمنِ.

الخُطوةُ 2: أُحَلِّلُ المقدارَ الجبريَّ فِي الطرفِ الأيسرِ مِنَ المُعادلةِ على صورةِ حاصلِ ضربِ عامِلَيْنِ.

الخُطوةُ 3: أُساوي كلَّ عاملٍ بالصِّفرِ (خاصيَّةُ الضَّربِ الصِّفريِّ)، وَأَحُلُّ كلَّ مُعادلةٍ خطيَّةٍ.

الخُطوةُ 4: حلولُ المُعادلةِ التربيعيَّةِ هِيَ حلولُ المُعادلتَيْنِ الخَطِّيَّتَيْنِ.

أتذكَّرُ

إخراجُ العاملِ المُشتَرَكِ الأكبرِ لِحدودِ مقدارٍ جبريٍّ هِيَ عمليَّةٌ عكسيَّةٌ لعمليَّةِ التوزيعِ.

حلُّ المُعادلاتِ التربيعيَّةِ بالتحليلِ: إخراجُ العاملِ المُشترَكِ الأكبرِ.

تعلَّمتُ سابقًا أنَّهُ يمكنُ تحليلُ المقدارِ الجبريِّ بإخراجِ العاملِ المُشتَرَكِ الأكبرِ لِحُدودِهِ، ويمكنُ استعمالُ هذهِ الطريقةِ مِنَ التحليلِ لحلِّ المُعادلاتِ التربيعيَّةِ، كما فِي المثالِ الآتي:

مثال 1

أَحُلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ:

1 $x^2 = -5x$

المُعادلةُ المُعطاةُ	$x^2 = -5x$
بجمعِ $5x$ إلى طَرَفَيِ المُعادلةِ	$x^2 + 5x = 0$
بإخراجِ العاملِ المُشترَكِ الأكبرِ	$x(x + 5) = 0$
خاصيَّةُ الضَّربِ الصِّفريِّ	$x = 0$ or $x + 5 = 0$
بحلِّ كلِّ مُعادلةٍ	$x = -5$

إذنْ، الجذرانِ هُما: $0, -5$

التحقُّق: أُعَوِّض قيمتَيْ x فِي المُعادلةِ الأصليَّةِ.

عندما $x = -5$

$$x^2 = -5x$$

$$(-5)^2 \overset{?}{=} -5(-5)$$

$$25 = 25 \quad ✓$$

عندما $x = 0$

$$x^2 = -5x$$

$$(0)^2 \overset{?}{=} -5(0)$$

$$0 = 0 \quad ✓$$

② $6x^2 = 20x$

المُعادلةُ المُعطاةُ	$6x^2 = 20x$
بطرحِ $20x$ مِنْ طَرَفَيِ المُعادلةِ	$6x^2 - 20x = 0$
بإخراجِ العاملِ المُشترَكِ الأكبرِ	$2x(3x - 10) = 0$
خاصيَّةُ الضَّربِ الصِّفريِّ	$2x = 0$ or $3x - 10 = 0$
بحلِّ كلِّ مُعادلةٍ	$x = 0$ $\quad x = \frac{10}{3}$

إذنْ، الجذرانِ هُما: $0, \frac{10}{3}$

التحقُّق: أُعَوِّض قيمتَيْ x فِي المُعادلةِ الأصليَّةِ.

أتحقَّق من فهمي

أَحُلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ:

a) $x^2 - 3x = 0$

b) $8x^2 = -12x$

حلُّ المُعادلاتِ التربيعيَّةِ بالتحليل: الصورةُ القياسيَّةُ $ax^2 + bx + c = 0$

إذا كانَ المقدارُ الجبريُّ $ax^2 + bx + c$ قابلًا للتحليلِ فيمكنُ أيضًا استعمالُ خاصيَّةِ الضَّربِ الصِّفريِّ لحلِّ المُعادلةِ التربيعيَّةِ المكتوبةِ بالصورةِ القياسيَّةِ $ax^2 + bx + c = 0$؛ حيثُ $a \neq 0$

أتذكَّرُ

لتحليلِ ثلاثيِّ حدودٍ علَى الصورةِ $ax^2 + bx + c$، أجِدُ عددَيْنِ صحيحَيْنِ m وَ n مجموعُهُما يُساوي b، وحاصلُ ضربِهِما يُساوي c، ثُمَّ أكتبُ ax^2+bx+c على صورة $(x + m)(x + n)$.

مثال 2

أَحُلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ:

1 $x^2 + 6x + 8 = 0$

المُعادلةُ المُعطاةُ $x^2 + 6x + 8 = 0$

بالتحليلِ إلَى العواملِ $(x + 4)(x + 2) = 0$

خاصيَّةُ الضَّربِ الصِّفريِّ $x + 4 = 0$ or $x + 2 = 0$

بحلِّ كلِّ مُعادلةٍ $x = -4$ $\quad x = -2$

إذنْ، الجذرانِ هُما: $-4, -2$

التحقُّقُ: أُعوِّضُ قيمتَيْ x فِي المُعادلةِ الأصليَّةِ.

أتذكَّرُ

بمـا أنَّ $b = 6,\ c = 8$، فيَجِبُ إيجادُ عددَيْنِ صحيحَيْنِ موجبَيْنِ مجموعُهُمـا 6 وحاصلُ ضربِهِما 8.

2 $x^2 - 8x + 12 = 0$

المُعادلةُ المُعطاةُ $x^2 - 8x + 12 = 0$

بالتحليلِ إلَى العواملِ $(x - 6)(x - 2) = 0$

خاصيَّةُ الضَّربِ الصِّفريِّ $x - 6 = 0$ or $x - 2 = 0$

بحلِّ كلِّ مُعادلةٍ $x = 6$ $\quad x = 2$

إذنْ، الجذرانِ هُما: $6, 2$

التحقُّقُ: أُعوِّضُ قيمتَيْ x فِي المُعادلةِ الأصليَّةِ.

أتذكَّرُ

بما أنَّ $b = -8,\ c = 12$، فيَجِبُ إيجادُ عددَيْنِ صحيحَيْنِ سالِبَيْنِ مجموعُهُما -8 وحاصلُ ضربِهِما 12.

3 $x^2 + 5x = 6$

المُعادلةُ المُعطاةُ $x^2 + 5x = 6$

بطرحِ 6 مِنْ طَرَفَيِ المُعادلةِ $x^2 + 5x - 6 = 0$

بالتحليلِ إلَى العواملِ $(x - 1)(x + 6) = 0$

خاصيَّةُ الضَّربِ الصِّفريِّ $x - 1 = 0$ or $x + 6 = 0$

بحلِّ كلِّ مُعادلةٍ $x = 1$ $\quad x = -6$

إذنْ، الجذرانِ هُما: $1, -6$

التحقُّقُ: أُعوِّضُ قيمتَيْ x فِي المُعادلةِ الأصليَّةِ.

أتذكَّرُ

بمـا أنَّ $b = 5,\ c = -6$، فيَجِبُ إيجادُ عددَيْنِ صحيحَيْنِ مُختلِفَيْنِ فِي الإشـارةِ مجموعُهُما 5 وحاصلُ ضربِهِما -6.

أتحقَّق من فهمي

أَحُلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ:

a) $x^2 + 7x = -6$ b) $x^2 - 9x + 8 = 0$ c) $x^2 - 4x - 21 = 0$

حلُّ المُعادلاتِ التربيعيَّةِ بالتحليلِ: تحليلُ الفرقِ بينَ مُرَبَّعَيْنِ.

يمكنُ استعمالُ خاصيَّةِ الضَّربِ الصِّفريِّ والتحليلِ لحلِّ مُعادلاتٍ تربيعيَّةٍ تتضمَّنُ فرقًا بينَ مُرَبَّعَيْنِ.

أتذكَّرُ

الفرقُ بينَ مُرَبَّعَيْ حَدَّيْنِ يُساوي ناتجَ ضربِ مجموعِ الحَدَّيْنِ في الفرقِ بينَهُما.

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

مثال 3

أَحُلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ:

1 $x^2 - 36 = 0$

$x^2 - 36 = 0$ المُعادلةُ المُعطاةُ

$(x-6)(x+6) = 0$ بتحليلِ الفرقِ بينَ مُرَبَّعَيْنِ

$x - 6 = 0$ or $x + 6 = 0$ خاصيَّةُ الضَّربِ الصِّفريِّ

$x = 6$ $x = -6$ بحلِّ كلِّ مُعادلةٍ

إذنْ، الجذرانِ هُما: $-6, 6$

التحقُّقُ: أُعَوِّضُ قيمتَيْ x في المُعادلةِ الأصليَّةِ.

2 $8x^2 - 50 = 0$

$8x^2 - 50 = 0$ المُعادلةُ المُعطاةُ

$2(4x^2 - 25) = 0$ بإخراجِ العاملِ المُشترَكِ الأكبرِ

$2(2x-5)(2x+5) = 0$ بتحليلِ الفرقِ بينَ مُرَبَّعَيْنِ

$2 \neq 0$ or $2x-5 = 0$ or $2x+5 = 0$ خاصيَّةُ الضَّربِ الصِّفريِّ

$x = \frac{5}{2}$ $x = -\frac{5}{2}$ بحلِّ كلِّ مُعادلةٍ

إذنْ، الجذرانِ هُما: $-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}$

التحقُّقُ: أُعَوِّضُ قيمتَيْ x في المُعادلةِ الأصليَّةِ.

أتذكَّرُ

يحتاجُ تحليلُ بعضِ المقاديرِ الجبريَّةِ إلى إجراءِ خُطوتَيْنِ، مثلِ: إخراجِ العاملِ المُشتركِ الأكبرِ للحدودِ جميعِها، ثمَّ تحليلِ ما تبقَّى مِنَ المقدارِ باستعمالِ تحليلِ الفرقِ بينَ مُرَبَّعَيْنِ.

أتحقَّق من فهمي

أَحُلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ:

a) $4x^2 - 1 = 0$

b) $2x^2 - 18 = 0$

حلُّ المُعادلاتِ التربيعيَّةِ بالتحليلِ: تحليلُ المُرَبَّعاتِ الكاملة.

تعلَّمتُ سابقًا أنَّ ثلاثيَّ الحدودِ علَى الصورةِ $a^2 + 2ab + b^2$ أوْ الصورةِ $a^2 - 2ab + b^2$ يُسَمّى مُربَّعا كاملًا ثلاثيَّ الحدودِ، ويمكنُ تحليلُهُ كالآتي:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)(a + b)$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)(a - b)$$

إذنْ، ينتجُ المُرَبَّعُ الكاملُ ثلاثيُّ الحدودِ مِنْ ضربِ مقدارٍ جبريٍّ في نفسِهِ، وهذا يعني وجودَ عاملٍ مُكَرَّرٍ عندَ حلِّ مُعادلةٍ تربيعيَّةٍ تحتوي على مُرَبَّعٍ كاملٍ ثلاثيِّ حدودٍ في أحدِ طرفَيْها وتحتوي في طرفِها الآخرِ على صفر، وحينَها تكفي مُساواةُ أحدِ هذَيْنِ العامِلَيْنِ بالصِّفرِ عندَ استخدامِ خاصيَّةِ الضَّربِ الصِّفريِّ.

مثال 4

أَحُلُّ المُعادلةَ: $9x^2 + 6x + 1 = 0$

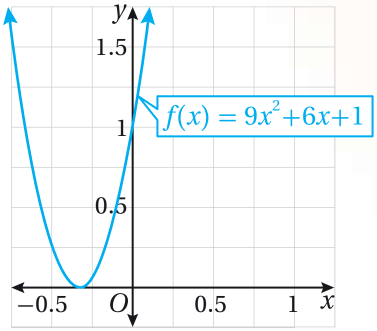
المُعادلةُ المُعطاةُ	$9x^2 + 6x + 1 = 0$
أكتبُ الطرفَ الأيسرَ على صورةِ $a^2 + 2ab + b^2$	$(3x)^2 + 2(3x)(1) + 1^2 = 0$
بتحليلِ المُرَبَّعِ الكاملِ ثلاثيِّ الحدودِ	$(3x + 1)(3x + 1) = 0$
خاصيَّةُ الضَّربِ الصِّفريِّ	$3x + 1 = 0$
بحلِّ كلِّ مُعادلةٍ	$x = -\frac{1}{3}$

إذنْ، للمُعادلةِ جذرٌ واحدٌ، هُوَ: $-\frac{1}{3}$

التحقُّقُ: أُعوِّضُ قيمةَ x في المُعادلةِ الأصليَّةِ.

الدَّعمُ البيانيُّ:

يظهرُ فِي الشكلِ المُجاورِ منحنى الاقترانِ المرافقِ للمُعادلةِ $9x^2 + 6x + 1 = 0$، الذي يقطعُ المحورَ x فــي نقطةٍ واحــدةٍ؛ ممّا يعني وجــودَ حلٍّ واحدٍ للمُعادلةِ.



أتحقَّق من فهمي

أَحُلُّ المُعادلةَ: $x^2 - 6x + 9 = 0$

حلُّ المُعادلاتِ التربيعيَّةِ باستعمالِ الجذرِ التربيعيِّ.

تعلَّمتُ سابقًا أنَّهُ يمكنُ حلُّ المُعادلاتِ علَى الصورةِ $x^2 = c$؛ حيثُ $c \geq 0$، باستعمالِ تعريفِ الجــذرِ التربيعيِّ للعددِ الموجبِ؛ حيثُ: $x = \pm\sqrt{c}$، أمّا إذا لَمْ تَكُنِ المُعادلةُ التربيعيَّةُ مكتوبةً علَى الصورةِ $x^2 = c$، فأســتعملُ العملياتِ الجبريَّةَ لكتابــةِ x^2 وحدَهُ في أحدِ طرفَي المُعادلةِ أوَّلًا، ثمَّ أَحُلُّ المُعادلةَ بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ لكلِّ طرفٍ.

مثال 5

أَحُلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ:

① $3x^2 - 27 = 0$

المُعادلةُ المُعطاةُ	$3x^2 - 27 = 0$
بجمعِ 27 إلى طَرَفَيِ المُعادلةِ	$3x^2 = 27$
بقسمةِ طَرَفَيِ المُعادلةِ على 3	$x^2 = 9$
بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفَيْنِ	$x = \pm\sqrt{9}$
بالتبسيطِ	$x = \pm 3$

إذنْ، الجذرانِ هُما: $-3, 3$

التحقُّقُ: للتحقُّقِ، أُعَوِّضُ قيمتَيْ x فِي المُعادلةِ الأصليةِ.

أُفَكِّرُ

هلْ يمكنُ حــلُّ الفرعِ 1 مِنَ المثالِ بطريقةٍ أُخرى؟

2 $(x+4)^2 = 49$

المُعادلةُ المُعطاةُ	$(x+4)^2 = 49$
بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفَيْنِ	$x + 4 = \pm\sqrt{49}$
بالتبسيطِ	$x + 4 = \pm 7$
بطرحِ 4 مِنْ طَرَفَيِ المُعادلةِ	$x = -4 \pm 7$
بفصلِ الحَلَّيْنِ	$x = -4 + 7$ or $x = -4 - 7$
بالتبسيطِ	$x = 3$ or $x = -11$

إذنْ، الجذرانِ هُما: 3 , 11−

التحقُّقُ: للتحقُّقِ، أُعوِّضُ قيمتَيْ x فِي المُعادلةِ الأصليَّةِ.

أتحقَّقُ من فهمي

أَحُلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ:

a) $4x^2 - 100 = 0$

b) $(x-1)^2 = 16$

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أَحُلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ:

1. $4x^2 + 9x = 0$
2. 7x^2=6x
3. $x^2 + 5x + 4 = 0$
4. $x^2 - 2x - 15 = 0$
5. $t^2 - 8t + 16 = 0$
6. $x^2 - 18x = -32$
7. $x^2 + 2x = 24$
8. $x^2 = 17x - 72$
9. $2m^2 = 50$
10. $x^2 - 9 = 0$
11. $x^2 + 5 = 0$
12. $\frac{1}{3}x^2 - 3 = 0$
13. $s^2 + 20s + 100 = 0$
14. $y^2 + \frac{1}{2}y = -\frac{1}{16}$
15. $9m^2 - 12m + 4 = 0$
16. $(x+1)^2 = 4$
17. $9(x-1)^2 = 16$
18. $5x^2 + 2 = 6$

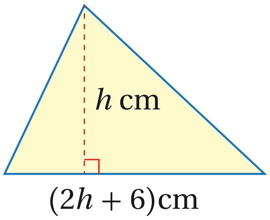
19 **فُرشاةٌ:** أسقطَ سفيانُ فرشاةَ طلاءٍ. إذا مَثّلَ الاقترانُ $h(t) = 3 - 4x^2$ ارتفاعَ تلكَ الفُرشاةِ بالأمتارِ عَنِ الأرضِ، بعدَ t ثانيةً مِنْ سُقوطِها مِنْ يَدِهِ، فبعدَ كَمْ ثانيةٍ تصلُ الأرضَ؟

أعمارٌ: إذا كانَ عمرُ لينةَ x عامًا، وزوجُها يكبُرُها بثلاثةِ أعوامٍ، وكانَ حاصلُ ضربِ عمريهِما 700، فَأَجِدُ:

20 مُعادلةً تربيعيَّةً تُمَثِّلُ الموقفَ.

21 عمرَ لينةَ.

22 **حديقةٌ:** حديقةٌ مستطيلةُ الشكلِ يزيدُ طولُها على عرضِها بمقدارِ 40 m، ومساحتُها $48000\ \text{m}^2$، يريدُ مزارعٌ إحاطتَها بسياجٍ. أَجِدُ طولَ السِّياجِ.



23 **هندسةٌ:** يُبيِّنُ الشكلُ المُجاورُ مثلثًا مساحتُهُ $40\ \text{cm}^2$. أَجِدُ ارتفاعَهُ h، وطولَ قاعدتِهِ.

24 أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ.

مهارات التفكير العليا

25 **أكتشِفُ الخطأَ:** حَلَّ سلمانُ ومهنّدٌ المُعادلةَ التربيعيَّةَ $x^2 - x - 4 = 0$، كما هُوَ مُبيَّنٌ في أدناهُ. أيُّهما إجابتُهُ صحيحةٌ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

سلمانُ

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$
$$(x - 4)(x + 1) = 0$$
$$x - 4 = 0 \quad \text{or} \quad x + 1 = 0$$
$$x = 4 \qquad\qquad x = -1$$

مهنّدٌ

$$x(x - 3) = 4$$
$$x = 4 \quad \text{or} \quad x - 3 = 4$$
$$x = -1$$

تبريرٌ: أُحَدِّدُ عددَ حلولِ كلِّ مُعادلةٍ ممّا يأتي مِنْ غيرِ حَلِّها، مُبَرِّرًا إجابتي:

28 $n^2 - 15 = -15$

27 $a^2 - 12 = 6$

26 $y^2 = -36$

29 **تبريرٌ:** أكتبُ مُعادلةً تربيعيَّةً علَى الصورةِ القياسيَّةِ، جذراها $x = -4, x = 6$، مُبرِّرًا إجابتي.

الدرس
3

حلُّ المُعادلاتِ التربيعيَّةِ بالتحليلِ (2)

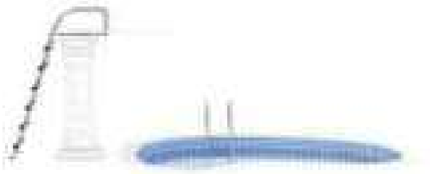
Solving Quadratic Equations by Factoring (2)

فكرة الدرس

- تحليلُ ثلاثيَّةِ الحدودِ علَى الصورةِ $x^2 + bx + c$
- حلُّ مُعادلاتٍ علَى الصورةِ $x^2 + bx + c = 0$

مسألة اليوم

إذا كانَ الاقترانُ $h(t) = -5t^2 + 7t + 6$ يُمَثِّلُ ارتفاعَ غطّاسٍ بالأمتارِ فوقَ سطحِ الماءِ، بعدَ t ثانيةً مِنْ قفزِهِ عَنْ مِنصَّةِ القفزِ. فمَا الزمنُ الذي يستغرقُهُ للوصولِ إلى سطحِ الماءِ؟



تحليلُ ثلاثيَّةِ الحدودِ $ax^2 + bx + c$

تعلَّمتُ سابقًا كيفَ أُحَلِّلُ ثلاثيَّةَ الحدودِ $x^2 + bx + c$، التي معاملُ x^2 فيها يُساوي 1، ويمكنُ أيضًا تحليلُ بعضِ ثُلاثياتِ الحدودِ التي علَى الصورةِ $ax^2 + bx + c$؛ حيثُ $a \neq 1$ بطريقةٍ مُشابهةٍ.

أتعلَّمُ

عندَ ضربِ مِقدارَيْنِ جبريَّيْنِ فإنَّ كُلًّا منهُما يكونُ عاملًا لناتجِ الضَّربِ.

أُلاحِظُ النمطَ الآتيَ في عمليَّةِ ضربِ المِقدارَيْنِ الجبريَّيْنِ $(2x + 1)$ وَ $(4x + 5)$:

$ax^2 + mx + nx + c$	$(2x+1)(4x+5) = 8x^2 + 10x + 4x + 5$
$ax^2 + bx + c$	$= 8x^2 + 14x + 5$
$m + n = b$ and $mn = ac$	$10 + 4 = 14$ and $10 \times 4 = 8 \times 5$

إذنْ، لتحليلِ ثلاثيَّةِ الحدودِ $8x^2 + 14x + 5$ أَجِدُ عددَيْنِ m وَ n حاصلُ ضربِهِما 8×5 أو 40، ومجموعُهُما 14.

مفهومٌ أساسيٌّ

تحليلُ ثلاثيَّةِ الحدودِ $ax^2 + bx + c$

لتحليلِ ثلاثيَّةِ $ax^2 + bx + c$، أَجِدُ عددَيْنِ صحيحَيْنِ m وَ n حاصلُ ضربِهِما يُساوي (ac)، ومجموعُهُما يُساوي b، ثمَّ أكتبُ $ax^2 + bx + c$ علَى الصورةِ $ax^2 + mx + nx + c$، ثمَّ أُحَلِّلُ بتجميعِ الحدودِ.

إذا كانتْ إشارةُ c موجبةً في ثلاثيِّ الحدودِ $ax^2 + bx + c$، فإنَّ لكلٍّ مِنْ m و n الإشارةَ نفسَها، ويعتمدُ تحديدُ إشارتَيْ m وَ n (موجبةٌ / سالبةٌ) على إشارةِ b، فإذا كانتْ b موجبةً فإنَّ إشارةَ كلٍّ منهُما موجبةٌ، وإذا كانتْ إشارةُ b سالبةً فإنَّ إشارةَ كلٍّ منهُما سالبةٌ.

مثال 1

أُحَلِّلُ $6x^2 + 23x + 7$

بما أنَّ $a = 6, b = 23, c = 7$، فَأَجِدُ عددَيْنِ ناتجُ ضربِهِما $6 \times 7 = 42$ ومجموعُهُما 23.

وبما أنَّ إشارةَ كلٍّ مِنْ c وَ b موجبةٌ، فَأُنْشِئُ جدولًا أُنَظِّمُ فيهِ أزواجَ عواملِ العددِ 42 الموجبةَ، ثمَّ أُحَدِّدُ العامِلَيْنِ اللذَيْنِ مجموعُهُما 23.

مجموعُ العامِلَيْنِ	أزواجُ عواملِ العددِ 42
43	1, 42
23	2, 21

العاملانِ الصحيحانِ

أكتبُ القاعدةَ	$6x^2 + 23x + 7 = 6x^2 + mx + nx + 7$
بتعويضِ $m = 2, n = 21$	$= 6x^2 + 2x + 21x + 7$
بتجميعِ الحدودِ ذاتِ العواملِ المُشترَكةِ	$= (6x^2 + 2x) + (21x + 7)$
بتحليلِ كلِّ تجميعٍ بإخراجِ العاملِ المُشترَكِ الأكبرِ	$= 2x(3x + 1) + 7(3x + 1)$
بإخراجِ $(3x + 1)$ عاملًا مُشترَكًا	$= (3x + 1)(2x + 7)$

أتحقَّقُ: أتحقَّقُ مِنْ صِحَّةِ التحليلِ بضربِ العامِلَيْنِ:

خاصيَّةُ التوزيعِ	$(3x+1)(2x+7) = 6x^2 + 21x + 2x + 7$
بالتبسيطِ	$= 6x^2 + 23x + 7$ ✓

أتحقَّقُ من فهمي

أُحَلِّلُ $2x^2 + 7x + 6$

إذا كانتْ c موجبةً وَ b سالبةً في ثُلاثيِّ الحدودِ $ax^2 + bx + c$، فإنَّ إشارةَ كلٍّ مِنْ m وَ n تكونُ سالبةً.

مثال 2

أُحَلِّلُ كُلًّا ممّا يأتي:

1 $3x^2 - 14x + 8$

بما أنَّ $a = 3, b = -14, c = 8$، فيَجِبُ إيجادُ عددَيْنِ حاصلُ ضربِهِما $3 \times 8 = 24$ ومجموعُهُما -14

بما أنَّ b سالبةٌ وَ c موجبةٌ، فَأُنْشِئُ جدولًا أُنَظِّمُ فيهِ أزواجَ عواملِ العددِ 24 السالبةِ، ثمَّ أُحَدِّدُ العاملَيْنِ اللذَيْنِ مجموعُهُما -14

مجموعُ العاملَيْنِ	أزواجُ عواملِ العددِ 24
-25	$-1, -24$
-14	$-2, -12$

مجموعُ العاملَيْنِ يساوي

أكتبُ القاعدةَ	$3x^2 - 14x + 8 = 3x^2 + mx + nx + 8$
بتعويضِ $m = -2, n = -12$	$= 3x^2 - 2x - 12x + 8$
بتجميعِ الحدودِ ذاتِ العواملِ المُشترَكَةِ	$= (3x^2 - 2x) + (-12x + 8)$
بتحليلِ كلِّ تجميعٍ بإخراجِ العاملِ المُشترَكِ الأكبرِ	$= x(3x-2) + (-4)(3x-2)$
بإخراجِ $(3x - 2)$ عاملًا مُشترَكًا	$= (3x-2)(x-4)$

أتحقَّقُ: أتحقَّقُ مِنْ صِحَّةِ التحليلِ بضربِ العاملَيْنِ:

خاصيَّةُ التوزيعِ	$(3x-2)(x-4) = 3x^2 - 12x - 2x + 8$
بالتبسيطِ	$= 3x^2 - 14x + 8$ ✓

② $20x^2 - 80x + 35$

الخُطوةُ 1: أُخرِجُ العاملَ المُشترَكَ الأكبرَ أوّلًا.

$$20x^2 - 80x + 35 = 5(4x^2 - 16x + 7)$$ بالتحليلِ بإخراجِ العاملِ المُشترَكِ الأكبرِ

الخُطوةُ 2: أُحلِّلُ المقدارَ $4x^2 - 16x + 7$

بما أنَّ $a = 4, b = -16, c = 7$، فَيَجِبُ إيجادُ عددَيْنِ حاصلُ ضربِهما $4 \times 7 = 28$ ومجموعُهُما -16

بما أنَّ b سالبةٌ وَ c موجبةٌ، فَأُنْشِئُ جدولًا أُنظِّمُ فيهِ أزواجَ عواملِ العددِ 28 السالبةِ، ثمَّ أُحَدِّدُ العامِلَيْنِ اللذَيْنِ مجموعُهُما -16

مجموعُ العامِلَيْنِ	أزواجُ عواملِ العددِ 28
-29	$-1, -28$
-16	$-2, -14$

العاملانِ الصحيحانِ

أكتبُ القاعدةَ $$4x^2 - 16x + 7 = 4x^2 + mx + nx + 7$$

بتعويضِ $m = -2, n = -14$ $$= 4x^2 - 2x - 14x + 7$$

بتجميعِ الحدودِ ذاتِ العواملِ المُشترَكةِ $$= (4x^2 - 2x) + (-14x + 7)$$

بتحليلِ كلِّ تجميعٍ بإخراجِ العاملِ المُشترَكِ الأكبرِ $$= 2x(2x - 1) + (-7)(2x - 1)$$

بإخراجِ $(2x - 1)$ عاملًا مُشترَكًا $$= (2x - 1)(2x - 7)$$

أتحقَّقُ: أتحقّقُ مِنْ صِحّةِ التحليلِ بضربِ العامِلَيْنِ:

خاصيَّةُ التوزيعِ $$(2x - 1)(2x - 7) = 4x^2 - 14x - 2x + 7$$

بالتبسيطِ $$= 4x^2 - 16x + 7 \quad ✓$$

إذنْ، $20x^2 - 80x + 35 = 5(2x - 1)(2x - 7)$

أتعلَّمُ

في بعضِ الأحيانِ يكونُ بينَ جميعِ حدودِ ثلاثيِّ الحدودِ عاملٌ مُشترَكٌ، وفي هذهِ الحالةِ أستعملُ خاصيَّةَ التوزيعِ لتحليلِ ثُلاثيِّ الحدودِ بإخراجِ العاملِ المُشترَكِ الأكبرِ أوّلًا قبلَ البدءِ بعمليّةِ التحليلِ.

أتحقَّق من فهمي

أُحَلِّلُ كُلًّا ممّا يأتي:

a) $9x^2 - 33x + 18$

b) $5x^2 - 13x + 6$

إذا كانتْ c سالبةً في ثُلاثيِّ الحدود $ax^2 + bx + c$، فإنَّ لِـ m وَ n إشارتَيْنِ مُختلِفَتَيْنِ.

مثال 3

أُحَلِّلُ $3x^2 - 7x - 6$

بما أنَّ $a = 3, b = -7, c = -6$، فَيَجِبُ إيجادُ عددَيْنِ حاصلُ ضربِهِما $3 \times -6 = -18$ ومجموعُهُما -7

بما أنَّ c سالبةٌ، فَأُنْشِئُ جدولًا أُنَظِّمُ فيهِ أزواجَ عواملِ العددِ (-18) مختلفةَ الإشارةِ، ثمَّ أُحَدِّدُ العامِلَيْنِ اللذَيْنِ مجموعُهُما -7

مجموعُ العامِلَيْنِ	أزواجُ عواملِ العددِ -18
-17	$1, -18$
17	$-1, 18$
-7	$2, -9$

العاملانِ الصحيحانِ

أكتبُ القاعدة	$3x^2 - 7x - 6 = 3x^2 + mx + nx - 6$
بتعويضِ $m = 2, n = -9$	$= 3x^2 + 2x + 9x - 6$
بتجميعِ الحدودِ ذاتِ العواملِ المُشترَكة	$= (3x^2 + 2x) + (-9x - 6)$
بتحليلِ كلِّ تجميعٍ بإخراجِ العاملِ المُشترَكِ الأكبرِ	$= x(3x+2) + (-3)(3x+2)$
بإخراجِ $(3x + 2)$ عاملًا مُشترَكًا	$= (3x+2)(x-3)$

أتحقَّقُ: أتحقَّقُ مِنْ صِحَّةِ التحليلِ بضربِ العامِلَيْنِ:

خاصيَّةُ التوزيعِ	$(3x+2)(x-3) = 3x^2 - 9x + 2x - 6$
بالتبسيطِ	$= 3x^2 - 7x - 6$ ✓

أتحقَّق من فهمي

أُحَلِّلُ $3x^2 - 11x + 6$

حلُّ المُعادلاتِ بالتحليلِ

يمكنُ حلُّ المُعادلاتِ التربيعيَّةِ علَى الصورةِ $ax^2 + bx + c = 0$ بالتحليلِ أوَّلًا، ثمَّ استعمالِ خاصيَّةِ الضَّربِ الصِّفريِّ.

مثال 4

أَحُلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ:

1 $3x^2 - 4x + 1 = 0$

المُعادلةُ المُعطاةُ	$3x^2 - 4x + 1 = 0$
بالتحليلِ إلَى العواملِ	$(3x - 1)(x - 1) = 0$
خاصيَّةُ الضَّربِ الصِّفريِّ	$3x - 1 = 0 \quad \text{or} \quad x - 1 = 0$
بحلِّ كلِّ مُعادلةٍ	$x = \frac{1}{3} \qquad x = 1$

إذنْ، الجذرانِ هُما: $1 , \frac{1}{3}$

أتذكَّرُ

إذا كانــتْ c موجبةً، وَ b ســالبةً في ثُلاثيِّ الحدودِ $ax^2 + bx + c$، فــإنَّ إشــارةَ كلٍّ مِــنْ m وَ n سالبةٌ.

2 $30x^2 - 5x = 5$

المُعادلةُ المُعطاةُ	$30x^2 - 5x = 5$
بطرحِ 5 مِنْ طَرَفَيِ المُعادلةِ	$30x^2 - 5x - 5 = 0$
بالتحليلِ بإخراجِ العاملِ المُشترَكِ الأكبرِ	$5(6x^2 - x - 1) = 0$
بالتحليلِ إلَى العواملِ	$5(3x + 1)(2x - 1) = 0$

أتذكَّرُ

أحرِصُ دائمًا على إخراجِ العاملِ المُشــترَكِ الأكبرِ أوَّلًا قبــلَ البَــدءِ بعمليَّةِ التحليلِ.

خاصيَّةُ الضَّربِ الصِّفريِّ $5 \neq 0 \quad \text{or} \quad 3x+1=0 \quad \text{or} \quad 2x-1=0$

بحلِّ كلِّ مُعادلةٍ $x = -\frac{1}{3} \qquad x = \frac{1}{2}$

إذنْ، الجذرانِ هُما: $\frac{1}{2}$ ، $-\frac{1}{3}$

أتحقَّق من فهمي

أَحُلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ:

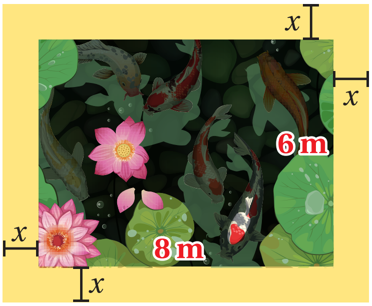
a) $2x^2 + 5x - 2 = 0$

b) $2x^2 + 6x = -18$

يمكنُ استعمالُ حلِّ المُعادلاتِ التربيعيَّةِ بالتحليلِ في الكثيرِ مِن التطبيقاتِ الحياتيَّةِ.

مثال 5 : من الحياة

بِركَةٌ: بِركَةُ أسماكِ زينةٍ مستطيلةُ الشكلِ طولُها **8 m** وعرضُها **6 m**، يحيطُ بها ممرٌّ عرضُهُ **x m**، كما في الشكلِ المُجاورِ. إذا كانَتِ المساحةُ المُخصَّصَةُ للبِركَةِ والممرِّ معًا **120 m²**، فَأَجِدُ عرضَ الممرِّ **x**.



طولُ المنطقةِ المُخصَّصَةِ للبِركةِ والممرِّ معًا يُساوي $(2x+8)$ m وعرضُها $(2x+6)$ m. بما أنَّ مساحةَ هذهِ المنطقةِ 120 m^2، فيمكنُ كتابةُ مُعادلةٍ حلِّها لإيجادِ قيمةِ x علَى النَّحوِ الآتي:

مساحةُ البِركَةِ والممرِّ $(2x+6)(2x+8) = 120$

خاصيَّةُ التوزيعِ $4x^2 + 16x + 12x + 48 = 120$

بالتبسيطِ $4x^2 + 28x + 48 = 120$

بالتبسيطِ $4x^2 + 28x - 72 = 0$

بالتحليلِ بإخراجِ العاملِ المُشترَكِ الأكبرِ $4(x^2 + 7x - 18) = 0$

بالتحليلِ إلَى العواملِ $4(x+9)(x-2) = 0$

خاصيَّةُ الضَّربِ الصِّفريِّ $4 \neq 0$ or $x + 9 = 0$ or $x - 2 = 0$

بحلِّ كلِّ مُعادلةٍ $x = -9$ $x = 2$

بما أنَّ الطولَ لا يمكنُ أنْ يكونَ سالبًا، فإنَّ عرضَ الممرِّ يُساوي 2 m

أتحقَّق من فهمي

محميَّةٌ: محميَّةٌ طبيعيَّةٌ مستطيلةُ الشكلِ يزيدُ طولُها على مِثْلَيْ عرضِها بمقدارِ 1 km. إذا كانتْ مساحتُها $136\ \text{km}^2$، فَأَجِدُ أبعادَها.

معلومةٌ

تُنْشَأُ المحميّاتُ الطبيعيَّةُ بهدفِ حمايةِ الأنواعِ المُهَدَّدَةِ بالانقراضِ مِنَ الحَيَواناتِ والنباتاتِ، وَمِنْ أَهَمِّ تلكَ المحميّاتِ في الأُردنِّ محميَّةُ ضانا، التي تقعُ في محافظةِ الطفيلةِ وتبلغُ مساحتُها $320\ \text{km}^2$

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

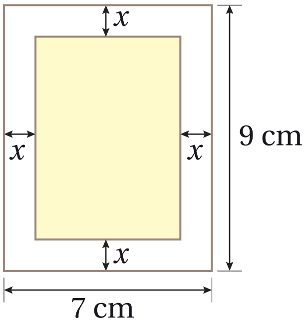
أُحَلِّلُ كُلًّا ممّا يأتي:

1) $3x^2 + 11x + 6$
2) $8x^2 - 30x + 7$
3) $6x^2 + 15x - 9$
4) $4x^2 - 4x - 35$
5) $12x^2 + 36x + 27$
6) $6r^2 - 14r - 12$

أَحُلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ:

7) $24x^2 - 19x + 2 = 0$
8) $18t^2 + 9t + 1 = 0$
9) $18x^2 + 9x + 1 = 0$
10) $5x^2 -9x -2 = 0$
11) $4t^2 - 4t - 35 = 0$
12) $6x^2 + 15x - 9 = 0$
13) $28\ s^2 - 85s + 63 = 0$
14) $9d^2 - 24d - 9 = 0$
15) $8x(x + 1) = 42$
16) $13x^2 = 11 - 2x$
17) $8x - 16 - x^2 = 0$
18) $2t^2 - t = 15$
19) $(2x + 1)(5x + 2) = (2x - 2)(x - 2)$
20) $8x^2 + 6x + 3 = 2x^2 + x + 2$

هندسةٌ: يُبيِّنُ الشكلُ المُجاورُ مستطيلًا مساحتُهُ 35 cm^2، صَنَعَتْهُ شُروقُ بقصِّ أشرطةٍ متساويةِ العرضِ مِنْ ورقةٍ مستطيلةِ الشكلِ.



21 أَجِدُ عرضَ الشريطِ.

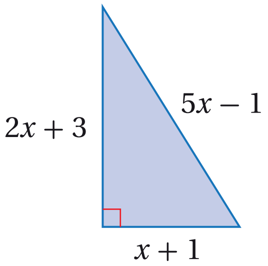
22 أَجِدُ أبعادَ المستطيلِ الجديدِ.

23 **بطاقةٌ:** بطاقةُ دعوةٍ مستطيلةُ الشكلِ يزيدُ طولُها على مِثْلَيْ عرضِها بمقدارِ 3 cm. إذا كانتْ مساحتُها 90 cm^2، فَأَجِدُ طولَها وعرضَها.

24 أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ.

مهاراتُ التفكيرِ العليا

تبريرٌ: يُبيِّنُ الشكلُ المُجاورُ مثلَّثًا قائمَ الزاويةِ.



25 أُبيِّنُ، بالاعتمادِ على الشكلِ، أنَّ $20x^2 - 24x - 9 = 0$، مُبرِّرًا إجابتي.

إرشادٌ: أستعملُ نظريَّةَ فيثاغورس

26 أَجِدُ مساحةَ المثلَّثِ.

27 **أكتشِفُ المُختلِفَ:** أيُّ المقاديرِ الآتيةِ مُختلِفَةٌ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

$x(2x - 3) + 2(2x - 3)$

$(2x - 3)(x + 2)$

$2x(x + 2) - 3(x + 2)$

$(2x + 3)(x - 2)$

28 **تَحَدٍّ:** أَجِدُ جميعَ قِيَمِ الثابتِ k؛ حيثُ يمكنُ تحليلُ ثلاثيَّةِ الحدودِ $2x^2 + kx + 12$ إلى عامِلَيْنِ باستعمالِ الأعدادِ الصحيحةِ.

الدرس
4

حلُّ المُعادلاتِ التربيعيَّةِ بإكمالِ المُربَّعِ
Solving Quadratic Equations by Completing the Square

فكرة الدرس حلُّ المُعادلاتِ التربيعيَّةِ بإكمالِ المُربَّعِ.

المصطلحات إكمالُ المُربَّعِ.

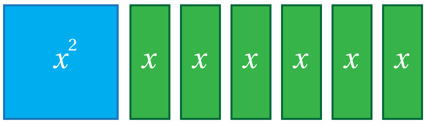
مسألة اليوم قذفَ أحمدُ طُعمًا فِي الماءِ مِنَ ارتفاعِ مترٍ واحدٍ. إذا كانَ الاقترانُ $h(t) = -5t^2 + 8t + 1$ قدْ مَثَّلَ ارتفاعَ هذا الطُّعمِ بالمترِ فوقَ سطحِ الماءِ، بعدَ t ثانيةً مِنْ قذفِهِ، فبعدَ كَمْ ثانيةٍ يصلُ إلى سطحِ الماءِ؟

إكمالُ المُربَّعِ

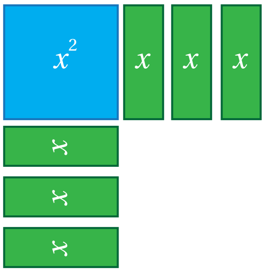
تعلّمتُ سابقًا حلّ المُعادلةِ التربيعيّةِ التي علَى الصورةِ $(x-m)^2 = n$؛ حيثُ $n > 0$، وذلكَ بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ لِطرَفَي المُعادلةِ.

أُلاحِظُ أنَّ المقدارَ $(x+m)^2$ هُوَ الصورةُ التحليليَّةُ للمُربَّعِ الكاملِ $x^2 + 2mx + m^2$، وهذا يقودُنا إلى استنتاجِ أنَّهُ يمكنُ حلُّ المُعادلاتِ التربيعيَّةِ التي تحوي مُربَّعًا كاملًا ثلاثيَّ حدودٍ معاملُ x^2 فيهِ يُساوي 1 باستخدامِ الجذرِ التربيعيِّ. ولكنْ، ماذا عَنِ المُعادلاتِ التي لا تحوي مُربَّعًا كاملًا؟

تُمثِّلُ القطعُ الجبريَّةُ المُجاورةُ المقدارَ الجبريَّ $x^2 + 6x$



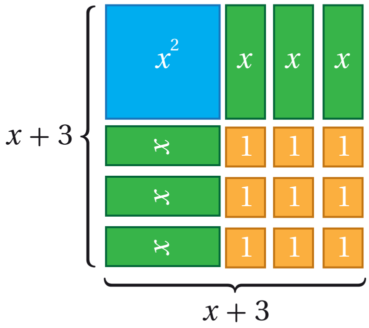
ويمكنُ إعادةُ ترتيبِ القطعِ الجبريَّةِ لِتُشكِّلَ جُزءًا مِنْ مُربَّعٍ، كما فِي الشكلِ المُجاورِ. أُلاحِظُ أنَّهُ القطعَ الخضراءَ قُسِّمَتْ إلى مجموعتَيْنِ في كلٍّ منها 3 قطعٍ.



يمكنُ إكمالُ المُرَبَّعِ بإضافةِ 3^2 أوْ 9 قطعٍ مفردةٍ.

إذنْ، المُرَبَّعُ الكاملُ ثُلاثِيُّ الحدودِ الناتجُ هُوَ

$(x+3)^2$ أوِ x^2+6x+9



يمكنُ التعبيرُ عَنِ الخُطواتِ السابقةِ جبريًّا كما يأتي:

$$x^2 + 6x + 9$$

$$\left[\frac{1}{2}(6)\right]^2$$

وبشكلٍ عامٍّ، يمكنُ تحويلُ المقدارِ التربيعيِّ الذي علَى الصورةِ x^2+bx إلى مُرَبَّعٍ كاملٍ ثُلاثِيِّ الحدودِ بإضافةِ $\left(\frac{b}{2}\right)^2$، وَتُسَمّى هذهِ العمليَّةُ **إكمالَ المُرَبَّعِ** (completing the square).

مفهومٌ أساسيٌّ

إكمالُ المُرَبَّعِ

بالكلماتِ: لإكمالِ مُرَبَّعِ أيِّ مقدارٍ تربيعيٍّ علَى الصورةِ x^2+bx، أتَّبعُ الخُطواتِ الآتيةَ:

الخُطوةُ 1: أَجِدُ نصفَ b.

الخُطوةُ 2: أُرَبِّعُ الناتجَ مِنَ **الخُطوةِ 1**

الخُطوةُ 3: أُضيفُ الناتجَ مِنَ **الخُطوةِ 2** إلى x^2+bx.

بالرُّموزِ: $x^2+bx+\left(\frac{b}{2}\right)^2=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2$

أتعلَّمُ

أَتَّبِعُ الخُطواتِ نفسَها، سواءٌ كانتْ b موجبةً أوْ سالبةً.

مثال 1

أُكمِلُ المُرَبَّعَ لكلِّ مقدارٍ تربيعيٍّ ممّا يأتي، ثمَّ أُحَلِّلُ المُرَبَّعَ الكاملَ ثُلاثيَّ الحدودِ الناتجَ:

① x^2+12x

$\frac{12}{2}=6$ بإيجادِ $\frac{b}{2}$

$6^2=36$ بإيجادِ $\left(\frac{b}{2}\right)^2$

$x^2+12x+36$ بإضافةِ $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ إلَى المقدارِ الأصليِّ

إذنْ، المقدارُ الناتجُ بعدَ إكمالِ المُرَبَّعِ هُوَ $x^2 + 12x + 36$، ويمكنُ تحليلُهُ كما يأتي:

بتحليلِ المُرَبَّعِ الكاملِ ثُلاثيِّ الحدودِ $x^2 + 12x + 36 = (x + 6)^2$

2 $x^2 - 26x$

بإيجادِ $\frac{b}{2}$ $\frac{-26}{2} = -13$

بإيجادِ $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ $(-13)^2 = 169$

بإضافةِ $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ إلَى المقدارِ الأصليِّ $x^2 - 26x + 169$

إذنْ، المقدارُ الناتجُ بعدَ إكمالِ المُرَبَّعِ هُوَ $x^2 - 26x + 169$، ويمكنُ تحليلُهُ كما يأتي:

بتحليلِ المُرَبَّعِ الكاملِ ثُلاثيِّ الحدودِ $x^2 - 26x + 169 = (x - 13)^2$

أتحقَّق من فهمي

أُكمِلُ المُرَبَّعَ لكلِّ مقدارٍ تربيعيٍّ ممّا يأتي، ثمَّ أُحَلِّلُ المُرَبَّعَ الكاملَ ثُلاثيَّ الحدودِ الناتجَ:

a) $x^2 + 2x$

b) $x^2 - 14x$

حلُّ المُعادلاتِ التربيعيَّةِ علَى الصورةِ $x^2 + bx + c = 0$ بإكمالِ المُرَبَّعِ.

يُمكِنُني استعمالُ إكمالِ المُرَبَّعِ لحلِّ أيِّ مُعادلةٍ تربيعيَّةٍ علَى الصورةِ $x^2 + bx + c = 0$، وذلكَ يتطلَّبُ فصلَ المقدارِ $x^2 + bx$ فِي الطرفِ الأيسرِ أوَّلًا، ثمَّ أُكمِلُ المُرَبَّعَ.

مثال 2

أُكمِلُ المُرَبَّعَ لكلِّ مقدارٍ تربيعيٍّ ممّا يأتي، ثمَّ أُحَلِّلُ المُرَبَّعَ الكاملَ ثُلاثيَّ الحدودِ الناتجَ:

1 $x^2 + 12x$

المُعادلةُ المُعطاةُ $x^2 + 4x - 12 = 0$

بجمعِ 12 إلى طَرَفَيِ المُعادلةِ $x^2 + 4x = 12$

بإكمالِ المُرَبَّعِ بإضافةِ $\left(\frac{4}{2}\right)^2 = 4$ إلى طَرَفَيِ المُعادلةِ $x^2 + 4x + 4 = 12 + 4$

بتحليلِ المُرَبَّعِ الكاملِ ثُلاثيِّ الحدودِ $(x + 2)^2 = 16$

أُفَكِّرُ

هلْ يمكنُ حلُّ الفرعِ 1 مِنَ المثالِ بالتحليلِ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفَيْنِ	$x + 2 = \pm 4$
بطرحِ 2 مِنْ طَرَفَي المُعادلةِ	$x = -2 \pm 4$
بفصلِ الحلَّيْنِ	$x = -2+4$ or $x = -2 -4$
بالتبسيطِ	$x = 2$ $\quad x = -6$

إذنْ، جذرا المُعادلةِ هما $2, -6$

التحقُّقُ: للتحقُّقِ، أُعوِّضُ قيمتَيْ x في المُعادلةِ الأصليَّةِ.

2 $x^2 - 3x - 1 = 0$

المُعادلةُ المُعطاةُ	$x^2 - 3x - 1 = 0$
بجمعِ 1 إلى طَرَفَي المُعادلةِ	$x^2 - 3x = 1$
بإكمالِ المُرَبَّعِ بإضافةِ $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ إلى طَرَفَي المُعادلةِ	$x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 1 + \frac{9}{4}$
بتحليلِ المُرَبَّعِ الكاملِ ثُلاثيِّ الحدودِ	$(x - \frac{3}{2})^2 = \frac{13}{4}$
بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفَيْنِ	$x - \frac{3}{2} = \pm \frac{\sqrt{13}}{2}$
بجمعِ $\frac{3}{2}$ مِنْ طَرَفَي المُعادلةِ	$x = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2}$
بفصلِ الحلَّيْنِ	$x = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}$ or $x = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}$
باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ	$x \approx 3.3$ $\quad x \approx -0.3$

إذنْ، جذرا المُعادلةِ التقريبيَّيْنِ $-0.3, 3.3$

التحقُّقُ: للتحقُّقِ، أُعوِّضُ قيمتَيْ x في المُعادلةِ الأصليَّةِ.

أُفكِّرُ

هلْ يمكنُ حلُّ الفرعِ 2 مِنَ المثالِ بالتحليلِ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

أتحقَّقُ من فهمي

أَحُلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ بإكمالِ المُرَبَّعِ، مُقرِّبًا إجابتي لأقربِ جزءٍ مِنْ عشرةٍ (إنْ لَزِمَ):

a) $x^2 + 8x + 7 = 0$

b) $x^2 - 5x - 3 = 0$

حلُّ المُعادلاتِ التربيعيَّةِ علَى الصورةِ $ax^2 + bx + c = 0$ بإكمالِ المُرَبَّعِ.

لحـلِّ المُعادلةِ التربيعيَّةِ علَى الصورةِ $ax^2 + bx + c = 0$؛ حيثُ $a \neq 1$، أقسِـمُ كلَّ حدٍّ فِي المُعادلــةِ على a، ثمَّ أفصِلُ الحدَّيْنِ اللذَيْنِ يحتويانِ على x^2 و x فِي الطرفِ الأيسـرِ أوَّلًا، ثمَّ أُكمِلُ المُرَبَّعَ.

مثال 3

أَحُلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ بإكمالِ المُرَبَّعِ:

1 $2x^2 - 12x + 8 = 0$

المُعادلةُ المُعطاةُ	$2x^2 - 12x + 8 = 0$
بقسمةِ كلِّ حدٍّ على 2	$x^2 - 6x + 4 = 0$
بطرحِ 4 مِنْ طَرَفَيِ المُعادلةِ	$x^2 - 6x = -4$
بإكمالِ المُرَبَّعِ بإضافةِ $\left(\frac{6}{2}\right)^2 = 9$ إلى طَرَفَيِ المُعادلةِ	$x^2 - 6x + 9 = -4 + 9$
بتحليلِ المُرَبَّعِ الكاملِ ثُلاثيِّ الحدودِ	$(x-3)^2 = 5$
بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفَيْنِ	$x - 3 = \pm\sqrt{5}$
بجمعِ 3 إلى طَرَفَيِ المُعادلةِ	$x = 3 \pm \sqrt{5}$
بفصلِ الحلَّيْنِ	$x = 3 + \sqrt{5}$ or $x = 3 - \sqrt{5}$

إذنْ، جذرا المُعادلةِ $3 + \sqrt{5}$, $3 - \sqrt{5}$

التحقُّقُ: للتحقُّقِ، أُعوِّضُ قيمتَيْ x فِي المُعادلةِ الأصليَّةِ.

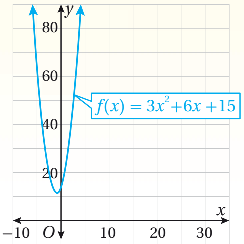
2 $3x^2 + 6x + 15 = 0$

المُعادلةُ المُعطاةُ	$3x^2 + 6x + 15 = 0$
بقسمةِ كلِّ حدٍّ على 3	$x^2 + 2x + 5 = 0$
بطرحِ 5 مِنْ طَرَفَيِ المُعادلةِ	$x^2 + 2x = -5$
بإكمالِ المُرَبَّعِ بإضافةِ $\left(\frac{2}{2}\right)^2 = 1$ إلى طَرَفَيِ المُعادلةِ	$x^2 + 2x + 1 = -5 + 1$
بتحليلِ المُرَبَّعِ الكاملِ ثُلاثيِّ الحدودِ	$(x + 1)^2 = -4$

بما أنَّهُ لا توجدُ أعدادٌ حقيقيَّةٌ مُرَبَّعاتُها سالبةٌ فالمُعادلةَ ليسَ لها حُلولٌ حقيقيَّةٌ.

الدَّعمُ البيانيُّ

يظهرُ فِي الشكلِ الآتي منحنى الاقتـرانِ المُرافـقِ للمُعادلةِ $3x^2+6x+15=0$، الذي لا يقطعُ المحورَ x؛ ممّا يعني عدمَ وجودِ حُلولٍ حقيقيَّةٍ للمُعادلةِ.



أتحقَّق من فهمي

أَحُلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ بإكمالِ المُرَبَّعِ:

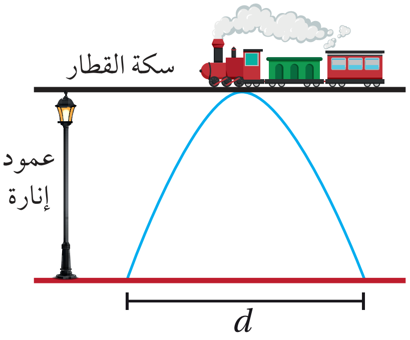
a) $2x^2 + 20x - 10 = 0$

b) $2x^2 + 8x + 12 = 0$

يمكنُ اســتعمالُ حلِّ المُعــادلاتِ التربيعيَّةِ بطريقةِ إكمــالِ المُرَبَّعِ فِي الكثيــرِ مِنَ التطبيقاتِ الحياتيَّةِ.

مثال 4 : من الحياة

تصميمٌ: تَمرُّ سِكَّةُ قطارٍ أعلى جسرٍ قَوْسِيٍّ، وَيُمَثِّلُ الاقتــرانُ $h(x) = -x^2 + 10x - 18$ ارتفــاعَ أيِّ نقطةٍ علَى الجســرِ عَنْ ســطحِ الأرضِ بالمترِ، وَ x البُعدَ الأُفقــيَّ للنقطةِ بالمترِ عَنْ عمودٍ بجانبِ الجسرِ، كما فِي الشكلِ المُجاورِ. أَجِدُ طولَ قاعدةِ القوسِ d، مُقَرِّبًا إجابتي لأقربِ جُزْءٍ مِنْ عشرَةٍ.



أفترضُ أنَّ مُستوى سطحِ الأرضِ يُمَثِّلُ المحورَ x، إذنْ تُمَثِّلُ كُلٌّ مِنْ نقطةِ بدايةِ القوسِ ونهايتِهِ حلًّا للمُعادلةِ المُرتبطةِ بالاقترانِ $h(x)$.

الخُطوةُ 1: أَحُلُّ المُعادلةَ المُرتبطةَ بالاقترانِ.

المُعادلةُ المُرتبطةُ بالاقترانِ	$-x^2 + 10x - 18 = 0$
بقسمةِ كُلِّ حدٍّ على -1	$x^2 - 10x + 18 = 0$
بطرحِ 18 مِنْ طَرَفَيِ المُعادلةِ	$x^2 - 10x = -18$
بإكمالِ المُرَبَّعِ بإضافةِ $\left(\frac{10}{2}\right)^2 = 25$ إلى طَرَفَيِ المُعادلةِ	$x^2 - 10x + 25 = -18 + 25$
بتحليلِ المُرَبَّعِ الكاملِ ثُلاثيِّ الحدودِ	$(x - 5)^2 = 7$
بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفَيْنِ	$x - 5 = \pm\sqrt{7}$
بجمعِ 5 إلى طَرَفَيِ المُعادلةِ	$x = 5 \pm \sqrt{7}$
بفصلِ الحلَّيْنِ	$x = 5 + \sqrt{7}$ or $x = 5 - \sqrt{7}$
باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ	$x \approx 7.6$ $\quad x \approx 2.4$

أتعلَّم

أُلاحِــظُ أنَّــهُ لا يمكــنُ حلُّ المُعادلــةِ المُرتبطةِ بالاقتــرانِ بالتحليلِ؛ لِذا أَحُلُّها بإكمالِ المُرَبَّعِ.

الخُطوةُ 2: أَجِدُ طولَ قاعدةِ القوسِ d.

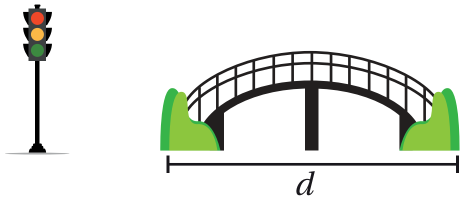
لإيجادِ طولِ قاعدةِ القوسِ d أطرحُ أحدَ الحلَّيْنِ مِنَ الآخَرِ.

$$d = 7.6 - 2.4 = 5.2$$

إذنْ، طولُ قاعدةِ القوسِ 5.2 m تقريبًا.

أتحقَّق من فهمي

تصميمٌ: صَمَّمَ مهندسٌ نموذجًا لجسرِ مُشاةٍ على شكلِ قطعٍ مُكافِئٍ، بحيثُ يُمَثِّلُ الاقترانُ: $h(x) = -x^2 + 6x - 7$ ارتفاعَ الجسرِ عَنْ قاعدةِ النموذجِ بالديسيمترِ، وَ x البُعدَ الأُفقيَّ بالديسيمترِ عَنْ إشارةٍ ضوئيَّةٍ، كما في الشكلِ المُجاورِ. أَجِدُ طولَ قاعدةِ الجسرِ d، مُقَرِّبًا إجابتي لأقربِ جُزْءٍ مِنْ عشرَةٍ.



أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أُكمِلُ مُرَبَّعَ كلِّ مقدارٍ تربيعيٍّ ممّا يأتي، ثمَّ أُحَلِّلُ المُرَبَّعَ الكاملَ ثُلاثيَّ الحدودِ الناتجَ:

1 $x^2 + 4x$

2 $x^2 + 14x$

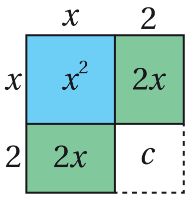
3 $x^2 - 3x$

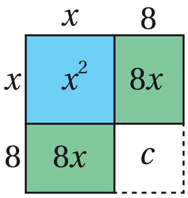
4 $x^2 + 8x$

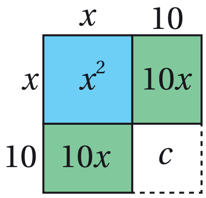
5 $x^2 - 2x$

6 $x^2 + 22x$

أَجِدُ قيمةَ c في كلٍّ ممّا يأتي، ثمَّ أَجِدُ المقدارَ الجبريَّ الذي يُعبِّرُ عَنِ النموذجِ:

7


8


9


أَحُلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ بإكمالِ المُرَبَّعِ:

10 $x^2 + 4x = 12$

11 $x^2 - 14x = -13$

12 $x^2 - 6x + 11 = 0$

13 $x^2 + 4x - 1 = 0$

14 $x^2 + 14x - 5 = 0$

15 $x^2 - 6x + 3 = 0$

16 $x^2 + 13x + 35 = 0$

17 $x^2 + 2x - 1 = 0$

18 $x^2 + 2x - 9 = 0$

أَحُلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ بإكمالِ المُرَبَّعِ، مُقَرِّبًا إجابتي لأقربِ جُزءٍ مِنْ عشرَةٍ (إنْ لَزِمَ):

19 $x^2 + 2x - 9 = 0$

20 $x^2 - 4x + 7 = 0$

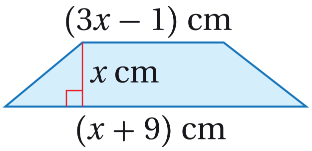
21 $x^2 + 2x + 5 = 0$

22 $2x^2 - 6x - 3 = 0$

23 $4x^2 - 8x + 1 = 0$

24 $2x^2 + 5x - 10 = 0$

25 **هندسـةٌ:** يُبيِّنُ الشكلُ المُجاورُ شبهَ منحرفٍ مساحتُهُ $20\ \text{cm}^2$. أَجِدُ قيمةَ x، مُقَرِّبًا إجابتي لأقربِ جُزءٍ مِنْ عشرَةٍ.



26 **ضفادعُ:** جلسَ ضفدعٌ على جذعِ شجرةٍ يرتفعُ 1 m عَنْ سطحِ الأرضِ، ثُمَّ قفزَ إلى سطحِ الأرضِ لِيُمَثِّلَ الاقترانُ $h(t) = -0.2t^2 + 0.6t + 1$ ارتفاعَهُ بالمترِ عَنْ سطحِ الأرضِ بعدَ t ثانيةً مِنْ قفزِهِ عَنِ الجذعِ. بعدَ كَمْ ثانيةٍ يصلُ الضفدعُ إلى سطحِ الأرضِ؟ أُقَرِّبُ إجابتي لأقربِ جُزءٍ مِنْ عشرَةٍ.

27 أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ.

مهاراتُ التفكيرِ العليا

28 **تبريرٌ:** أَجِدُ جميعَ قِيَمِ الثابتِ b، التي تجعلُ المقدارَ $x^2 + bx + 25$ مُرَبَّعًا كاملًا، مُبَرِّرًا إجابتي.

29 **تبريرٌ:** هلْ يمكنُ حلُّ المُعادلةِ $x^2 + 10x = -20$ بطريقتَيِ التحليلِ وإكمالِ المُرَبَّعِ؟ أُبَرِّرُ إجابتي.

30 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أكتبُ مُعادلةً تربيعيَّةً تُحَلُّ بطريقةِ إكمالِ المُرَبَّعِ لا بطريقةِ التحليلِ، ويكونُ جذراها عددَيْنِ حقيقيَّيْنِ موجبَيْنِ.

الدرس

5

حلُّ المُعادلاتِ التربيعيَّةِ باستعمالِ القانونِ العامِّ

Solving Quadratic Equations Using the Quadratic Formula

فكرة الدرس حلُّ المُعادلةِ التربيعيَّةِ باستعمالِ القانونِ العامِّ.

المصطلحات القانونُ العامُّ، المُمَيِّزُ.

مسألة اليوم في لعبةِ رمي القرصِ، رمى لاعبُ القرصَ فَمَثَّلَ الاقترانُ $f(x) = -0.04x^2 + 0.84x + 2$ ارتفاعَ القرصِ بالمترِ عَنْ سطحِ الأرضِ، وَ x المسافةَ الأُفقيَّةَ بالمترِ بينَ اللاعبِ والقرصِ. أَجِدُ المسافةَ الأُفقيَّةَ بينَ اللاعبِ والقرصِ عندما يصلُ القرصُ إلى سطحِ الأرضِ.

القانونُ العامُّ

تعلَّمتُ في الدرسِ السابقِ حلَّ المُعادلاتِ التربيعيَّةِ باستعمالِ طريقةِ إكمالِ المُرَبَّعِ، ويمكنُ مِنْ خلالِ هذهِ الطريقةِ اشتقاقُ قانونٍ يُستعمَلُ لحلِّ أيِّ مُعادلةٍ تربيعيَّةٍ مكتوبةٍ علَى الصورةِ القياسيَّةِ $ax^2 + bx + c = 0$، كما سَأُلاحِظُ عندَ تنفيذِ النشاطِ المفاهيميِّ الآتي:

نشاطٌ مفاهيميٌّ

حلُّ المُعادلةِ التربيعيَّةِ بإكمالِ المُرَبَّعِ

تُوَضِّحُ الخُطواتُ الآتيةُ طريقةَ حلِّ أيِّ مُعادلةٍ تربيعيَّةٍ علَى الصورةِ $ax^2 + bx + c = 0$؛ حيثُ $a \neq 0$. باستعمالِ طريقةِ إكمالِ المُرَبَّعِ، أَصِفُ الإجراءَ الذي تَمَّ في كلِّ خُطوةٍ:

$ax^2 + bx + c = 0$ ……………………………………

$ax^2 + bx = -c$ ……………………………………

$x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{-c}{a}$ ……………………………………

$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$ ……………………………………

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$ ……………………………………

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2}$ ……………………………………

$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$ ……………………………………

$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ……………………………………

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ……………………………………

تُسَـمَّى الصيغةُ التي جرى التوصُّلُ إليها فِي الســطرِ الأخيرِ مِنَ النشاطِ الســابقِ **القانونَ العامَّ** (quadratic formula).

مفهومٌ أساسيٌّ

حلُّ المُعادلةِ التربيعيَّةِ بالقانونِ العامِّ

يمكنُ حلُّ المُعادلةِ التربيعيَّةِ $ax^2 + bx + c = 0$ بالقانونِ العامِّ علَى النَّحوِ الآتي:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

حيثُ $a \neq 0$ و $b^2 - 4ac \geq 0$.

مثال 1

أَحُلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ بالقانونِ العامِّ، مُقَرِّبًا إجابتي لأقربِ جُزءٍ مِنْ عشرَةٍ (إنْ لَزِمَ):

1 $2x^2 - 3x = 5$

الخُطوةُ 1: أكتبُ المُعادلةَ بالصورةِ القياسيَّةِ.

المُعادلةُ المُعطاةُ	$2x^2 - 3x = 5$
بطرحِ 5 مِنْ طَرَفَي المُعادلةِ	$2x^2 - 3x - 5 = 0$

الخُطوةُ 2: أُطَبِّقُ القانونَ العامَّ.

صيغةُ القانونِ العامِّ	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
بتعويضِ $a = 2, b = -3, c = -5$	$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(2)(-5)}}{2(2)}$
بالتبسيطِ	$= \frac{3 \pm \sqrt{9 + 40}}{4}$
بالجمعِ، ثمَّ إيجادِ الجذرِ التربيعيِّ	$= \frac{3 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{3 \pm 7}{4}$
بفصلِ الحلَّيْنِ	$x = \frac{3 - 7}{4}$ or $x = \frac{3 + 7}{4}$
بالتبسيطِ	$x = -1$ $\quad x = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

إذنْ، جذرا المُعادلةِ هُما $-1, \frac{5}{2}$

أتعلَّمُ

بما أنَّهُ يمكنُ إيجادُ الجذرِ التربيعيِّ للعــددِ 49، فلا حاجةَ إلى استعمالِ الآلةِ الحاسبةِ؛ لِذا تكونُ قيمةُ الجــذرِ دقيقةً وليســتْ تقريبيَّةً.

② $2x^2 - 3x = 5$

الخُطوةُ 1: أكتبُ المُعادلةَ بالصورةِ القياسيَّةِ.

المُعادلةُ المُعطاةُ	$5x^2 - 11x = 4$
بطرحِ 4 مِنْ طَرَفَيِ المُعادلةِ	$5x^2 - 11x - 4 = 0$

الخُطوةُ 2: أُطبِّقُ القانونَ العامَّ.

صيغةُ القانونِ العامِّ	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
بتعويضِ $a = 5, b = -11, c = -4$	$x = \frac{-(-11) \pm \sqrt{(-11)^2 - 4(5)(-4)}}{2(5)}$
بالتبسيطِ	$= \frac{11 \pm \sqrt{121 + 80}}{10}$
بالجمعِ	$= \frac{3 \pm \sqrt{201}}{10}$
بفصلِ الحلَّيْنِ	$x = \frac{3 - \sqrt{201}}{10}$ or $x = \frac{3 + \sqrt{201}}{10}$
باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ	$x \approx 2.5$ $\qquad$ $x \approx -0.3$

إذنْ، جذرا المُعادلةِ التقريبيّانِ $-0.3, 2.5$

أتعلَّمُ

بما أنَّ $\sqrt{201}$ عددٌ غيرُ نسبيٍّ؛ لِذا أستعملُ الآلةَ الحاسبةَ لإيجادِ قيمةٍ تقريبيَّةٍ للحلِّ، أمّا القيمةُ الدقيقةُ للحلِّ فتكونُ بالإبقاءِ علَى الجذرِ كما هُوَ.

أتحقَّقُ من فهمي

أَحُلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ بالقانونِ العامِّ، مُقَرِّبًا إجابتي لأقربِ جُزءٍ مِنْ عشرَةٍ (إنْ لَزِمَ):

a) $3x^2 + 16x = -5$

b) $x^2 - 2x = 4$

المُمَيِّزُ

تعلَّمتُ سابقًا أنَّ للمُعادلةِ التربيعيَّةِ حلَّيْنِ حقيقيَّيْنِ مختلفَيْنِ، أوْ حلًّا حقيقيًّا واحدًا، أوْ لا يوجدُ لها حُلولٌ حقيقيَّةٌ، ويمكنُ تحديدُ عددِ الحُلولِ الحقيقيَّةِ للمُعادلةِ التربيعيَّةِ قبلَ حلِّها باستعمالِ **المُمَيِّزِ** (discriminant)، وَهُوَ المقدارُ التربيعيُّ الذي يقعُ أسفلَ الجذرِ التربيعيِّ في القانونِ العامِّ $(b^2 - 4ac)$، وَيُرمَزُ لَهُ بالرَّمزِ Δ.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \longleftarrow \boxed{\text{المميز}}$$

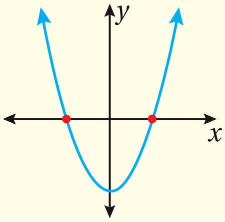
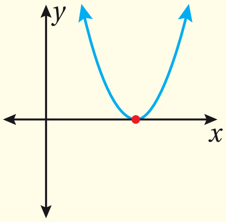
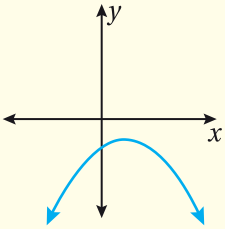
رموزٌ رياضيَّةٌ

الرَّمزُ Δ إغريقيٌّ، وَيُقرَأُ دلتا.

مفهومٌ أساسيٌّ

استعمالُ المُميِّزِ

مُميِّزُ المُعادلةِ التربيعيَّةِ $ax^2 + bx + c = 0$ هُوَ $\Delta = b^2 - 4ac$، ويمكنُ استعمالُهُ لتحديدِ عددِ حلولِ المُعادلةِ التربيعيَّةِ كما يأتي:

إشارة المميز Δ	$\Delta > 0$ موجبٌ	$\Delta = 0$ صفرٌ	$\Delta < 0$ سالبٌ
عددُ الحُلولِ	حلّانِ حقيقيّانِ مختلفانِ	حلٌّ حقيقيٌّ واحدٌ	لا توجدُ حُلولٌ حقيقيَّةٌ
			

مثال 2

أُحَدِّدُ عددَ الحُلولِ الحقيقيَّةِ لكلِّ مُعادلةٍ تربيعيَّةٍ ممّا يأتي باستعمالِ المُمَيِّزِ:

1 $x^2 - 4x + 3 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$ صيغةُ المُمَيِّزِ

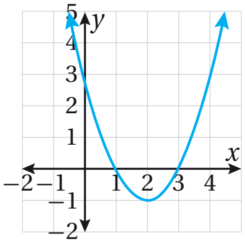
$= (-4)^2 - 4(1)(3)$ بتعويضِ $a = 1, b = -4, c = 3$

$= 4$ بالتبسيطِ

بما أنَّ $\Delta > 0$، إذنْ للمُعادلةِ حلّانِ حقيقيّانِ مختلفانِ.

الدَّعمُ البيانِيُّ:

يُظهِرُ التمثيلُ البيانِيُّ المُجاورُ لمنحنى الاقترانِ المُرافقِ للمُعادلةِ $x^2 - 4x + 3 = 0$ وجودَ حلَّيْنِ حقيقيَّيْنِ مختلفَيْنِ لها.



2 $x^2 - 2x + 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$ صيغةُ المُمَيِّزِ

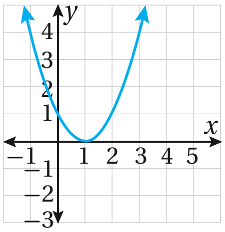
$= (-2)^2 - 4(1)(1)$ بتعويضِ $a = 1, b = -2, c = 1$

$= 0$ بالتبسيطِ

بما أنَّ $\Delta = 0$، إذنْ للمُعادلةِ حلٌّ حقيقيٌّ واحدٌ.

الدَّعمُ البيانيُّ:

يُظهِرُ التمثيلُ البيانِيُّ المُجاورُ لمنحنى الاقترانِ المُرافقِ للمُعادلةِ $x^2 - 2x + 1 = 0$ وجودَ حلَّيْنِ حقيقيَّيْنِ مختلفَيْنِ لها.



3 $x^2 - x + 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$ صيغةُ المُمَيِّزِ

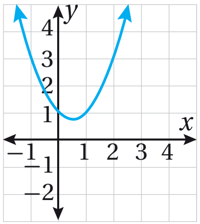
$= (-1)^2 - 4(1)(1)$ بتعويضِ $a = 1, b = -1, c = 1$

$= -3$ بالتبسيطِ

بما أنَّ $\Delta < 0$، إذنْ للمُعادلةِ حلٌّ حقيقيٌّ واحدٌ.

الدَّعمُ البيانيُّ:

يُظهِرُ التمثيلُ البيانِيُّ المُجاورُ لمنحنى الاقترانِ المُرافقِ للمُعادلةِ $x^2 - x + 1 = 0$ وجودَ حلَّيْنِ حقيقيَّيْنِ مختلفَيْنِ لها.



أتحقَّقُ من فهمي

أُحَدِّدُ عددَ الحُلولِ الحقيقيَّةِ لكلِّ مُعادلةٍ تربيعيَّةٍ ممّا يأتي باستعمالِ المُمَيِّزِ:

a) $-x^2 + 4x - 4 = 0$

b) $2x^2 + 8x - 3 = 0$

c) $x^2 - 6x + 11 = 0$

اختيارُ الطريقةِ الأنسبِ لحلِّ المُعادلةِ التربيعيَّةِ

تعلَّمتُ خمسَ طرائقَ لحلِّ المُعادلاتِ التربيعيَّةِ، وفي بعضِ الأحيانِ يكونُ استعمالُ إحدى هذهِ الطرائقِ أنسبَ مِنَ استعمالِ الطرائقِ الأُخرى، وَيُبَيِّنُ الجدولُ الآتي ملخَّصًا لهذِهِ الطرائقِ وإيجابياتِ كلٍّ منها وسلبياتِهِ.

ملخَّصُ المفهومِ

طرائقُ حلِّ المُعادلاتِ التربيعيَّةِ

الطريقةُ	الإيجابياتُ	السلبياتُ
التمثيلُ البيانيُّ	• يمكنُ استعمالُها لحلِّ أيِ مُعادلةٍ تربيعيَّةٍ. • يمكنُ بسهولةٍ تحديدُ الحُلولِ مِنَ التمثيلِ.	• قد لا تُعطي حلولًا دقيقةً.
التحليلُ إلَى العواملِ	• مِنْ أفضلِ الطرائقِ لتجرِبَتِها أوَّلًا. • تُعطي إجابةً مباشرةً إذا كانَتِ المُعادلةُ قابلةً للتحليلِ أو كانَ الحدُّ الثابتُ صِفرًا.	• ليستْ جميعُ المُعادلاتِ التربيعيَّةِ قابلةً للتحليلِ.
استعمالُ الجُذورِ التربيعيَّةِ	• تُستعمَلُ لحلِّ المُعادلاتِ علَى الصورةِ $x^2 = d$.	• لا تُستعمَلُ إذا كانَ الحدُّ bx موجودًا.
إكمالُ المُربَّعِ	• يمكنُ استعمالُها لحلِّ أيِّ مُعادلةٍ تربيعيَّةٍ علَى الصورةِ $ax^2 + bx + c = 0$. • مِنَ الأسهلِ استعمالُها إذا كانَ $a = 1$ وَb عددَيْنِ زوجيَّيْنِ.	• في بعضِ الأحيانِ تكونُ الحساباتُ مُعَقَّدَةً.
القانونُ العامُّ	• يمكنُ استعمالُها لحلِّ أيِّ مُعادلةٍ تربيعيَّةٍ علَى الصورةِ $ax^2 + bx + c = 0$. • تُعطي حُلولًا دقيقةً.	• تستغرقُ وقتًا أطولَ مِنْ باقي الطرائقِ لإجراءِ الحساباتِ.

مثال 3

أَحُلُّ كلَّ مُعادلةٍ ممّا يأتي باستعمالِ أيِّ طريقةٍ، مُبَرِّرًا سببَ اختيارِ الطريقةِ:

① $x^2 + 5x - 14 = 0$

يمكنُ تحليلُ الطرفِ الأيسرِ مِنَ المُعادلةِ بسهولةٍ؛ لِذا أَحُلُّها باستعمالِ التحليلِ إلَى العواملِ.

$x^2 + 5x - 14 = 0$ المُعادلةُ المُعطاةُ

$(x + 7)(x - 2) = 0$ بالتحليلِ إلَى العواملِ

$x + 7 = 0$ or $x - 2 = 0$ خاصيَّةُ الضَّربِ الصِّفريِّ

$x = -7$ $x = 2$ بحلِّ كلِّ مُعادلةٍ

إذنْ، جذرا المُعادلةِ هُما $-7, 2$

أتذكَّرُ

أُجرِّبُ أوَّلًا طريقةَ التحليلِ إلَى العواملِ قبلَ باقي الطرائقِ.

② $x^2 - 8x - 3 = 0$

بما أنَّ معاملَ x^2 يُساوي 1، ومعاملَ x عددٌ زوجيٌّ، فَمِنَ الأفضلِ استعمالُ طريقةِ إكمالِ المُرَبَّعِ.

$x^2 - 8x - 3 = 0$ المُعادلةُ المُعطاةُ

$x^2 - 8x = 3$ بجمعِ 3 إلى طَرَفَي المُعادلةِ

$x^2 - 8x + 16 = 3 + 16$ بإكمالِ المُرَبَّعِ بإضافةِ $\left(\frac{-8}{2}\right)^2 = 16$ إلى طَرَفَيِ المُعادلةِ

$(x - 4)^2 = 19$ بتحليلِ المُرَبَّعِ الكاملِ ثُلاثيِّ الحدودِ

$x - 4 = \pm\sqrt{19}$ بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفَيْنِ

$x = 4 \pm \sqrt{19}$ بجمعِ 4 إلى طَرَفَيِ المُعادلةِ

$x = 4 + \sqrt{19}$ or $x = 4 - \sqrt{19}$ بفصلِ الحلَّيْنِ

إذنْ، جذرا المُعادلةِ $4 + \sqrt{19}, 4 - \sqrt{19}$

أُفكِّرُ

هلْ يمكنُ حلُّ المُعادلةِ بالتحليلِ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

2 $2x^2 - 15x = -19$

بما أنَّهُ لا يمكنُ تحليلُ المُعادلةِ والأعدادُ فيها كبيرةٌ، فاستعملُ القانونَ العامَّ.

الخُطوةُ 1: أكتبُ المُعادلةَ بالصورةِ القياسيَّةِ.

المُعادلةُ المُعطاةُ $2x^2 - 15x = -19$

بطرحِ 19 مِنْ طَرَفَيِ المُعادلةِ $2x^2 - 15x + 19 = 0$

الخُطوةُ 2: أستعملُ المُمَيِّزَ لتحديدِ عددِ الحُلولِ الحقيقيَّةِ للمُعادلةِ.

صيغةُ المُمَيِّزِ $\Delta = b^2 - 4ac$

بتعويضِ $a = 2, b = -15, c = 19$ $= (-15)^2 - 4(2)(19)$

بالتبسيطِ $=73$

بما أنَّ $\Delta > 0$، إذنْ للمُعادلةِ حلّانِ حقيقيّانِ مختلفانِ.

الخُطوةُ 3: أُطَبِّقُ القانونَ العامَّ.

صيغةُ القانونِ العامِّ $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

بتعويضِ $a = 2, b = -15, \Delta = 73$ $x = \dfrac{-(-15) \pm \sqrt{73}}{2(2)}$

بالتبسيطِ $= \dfrac{15 \pm \sqrt{73}}{4}$

بفصلِ الحلَّيْنِ $x = \dfrac{15 - \sqrt{73}}{4}$ or $x = \dfrac{15 + \sqrt{73}}{4}$

إذنْ، جذرا المُعادلةِ $\dfrac{15 + \sqrt{73}}{4}$, $\dfrac{15 - \sqrt{73}}{4}$

أتعلَّمُ

يُفَضَّلُ تحديدُ عددِ الحُلولِ الحقيقيَّةِ للمُعادلةِ قبلَ البَدءِ بحلِّها باستعمالِ القانونِ العامِّ.

أتحقَّقُ من فهمي

أَحُلُّ كلَّ مُعادلةٍ ممّا يأتي باستعمالِ أيِّ طريقةٍ، مُبَرِّرًا سببَ اختيارِ الطريقةِ:

a) $x^2 + 3x - 28 = 0$ **b)** $-x^2 - 10x = 11$ **c)** $3x^2 - 13x = 5$

يُستعمَلُ القانونُ العامُّ كثيرًا في حلِّ المُعادلاتِ التربيعيَّةِ التي تُنَمذِجُ تطبيقاتٍ حياتيَّةً أوْ علميَّةً؛ لأنَّ قِيَمَ المعاملاتِ في تلكَ المُعادلاتِ قد لا تكونُ بسيطةً؛ ممّا يجعلُها غيرَ قابلةٍ للتحليلِ.

مثال 4 : من الحياة

حرائقُ الغاباتِ: أُطلِقَتْ قذيفةٌ لإطفاءِ حريقٍ شَبَّ في إحدى الغاباتِ، فَمَثَّلَ الاقترانُ $h(x) = -0.001x^2 + 0.5x + 4$ ارتفاعَها عَنِ الأرضِ بالمترِ؛ حيثُ x بُعدُها عَنِ المدفعِ. أَجِدُ المسافةَ الأُفقيَّةَ بينَ موقعِ سقوطِ القذيفةِ والمدفعِ.

إذا افترضنا أنَّ سطحَ الأرضِ يُمَثِّلُ المحورَ x، فإنَّ أحدَ جذري المُعادلةِ $-0.001x^2 + 0.5x + 4 = 0$ يُمَثِّلُ موقعَ سقوطِ القذيفةِ.

أستعملُ القانونَ العامَّ لحلِّ المُعادلةِ:

المُعادلةُ المُرتبطةُ بالاقترانِ

$$-0.001x^2 + 0.5x + 4 = 0$$

صيغةُ القانونِ العامِّ

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

بتعويضِ $a = -0.001$, $b = 0.5$, $c = 4$

$$x = \frac{-(0.5) \pm \sqrt{(0.5)^2 - 4(-0.001)(4)}}{2(-0.001)}$$

بالتبسيطِ

$$x = \frac{-0.5 \pm \sqrt{0.266}}{-0.002}$$

بفصلِ الحلَّيْنِ

$$x = \frac{-0.5 + \sqrt{0.266}}{-0.002} \quad \text{or} \quad x = \frac{-0.5 - \sqrt{0.266}}{-0.002}$$

باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

$$x \approx -7.9 \qquad x \approx 507.9$$

بما أنَّ موقعَ سقوطِ القذيفةِ يكونُ أمامَ المدفعِ وليسَ خلفَهُ، فأستثني القيمةَ السالبةَ. إذنْ، يَبْعُدُ موقعُ سقوطِ القذيفةِ عَنِ المدفعِ 507.9 m تقريبًا.

معلومةٌ

استطاعَ العلماءُ مؤخَّرًا تطويرَ قنابلَ تحتوي على موادَّ تُطفِئُ الحرائقَ، تُطلَقُ باستخدامِ مدافعَ مِنْ مسافةٍ تصلُ إلى 5 km نحوَ مناطقِ الاشتعالِ التي يصعبُ الوصولُ إليها، مثلِ الغاباتِ.

أتحقَّقُ من فهمي

في مناورةٍ تدريبيَّةٍ للقوّاتِ المُسلَّحةِ الأردنيَّةِ، أُطلِقَتْ قذيفةٌ مِنَ ارتفاعِ 2 m، فَمَثَّلَ الاقترانُ $h(x) = -0.001x^2 + 0.9x + 2$ ارتفاعَها بالمترِ عَنْ سطحِ الأرضِ؛ حيثُ x المسافةُ الأُفقيَّةُ بينَ القذيفةِ وموقعِ إطلاقِها. أَجِدُ المسافةَ الأُفقيَّةَ بينَ موقعِ إطلاقِ القذيفةِ وموقعِ سقوطِها.

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أَحُلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ بالقانونِ العامِّ، مُقرِّبًا إجابتي لأقربِ جُزءٍ مِنْ عشرَةٍ (إنْ لَزِمَ):

① $2x^2 + x - 8 = 0$

② $3x^2 + 5x + 1 = 0$

③ $x^2 - x - 10 = 0$

④ $4x^2 + 3 = -9x$

⑤ $6x^2 + 22x + 19 = 0$

⑥ $x^2 + 3x = 6$

⑦ $3x^2 + 1 = 7x$

⑧ $2x^2 + 11x + 4 = 0$

⑨ $4x^2 + 5x = 3$

⑩ $4x^2 = 9x - 4$

⑪ $7x^2 = 2 - 3x$

⑫ $5x^2 - 10x + 1 = 0$

أُحَدِّدُ عددَ الحُلولِ الحقيقيَّةِ لكلِّ مُعادلةٍ تربيعيَّةٍ ممّا يأتي باستعمالِ المُمَيِّزِ:

⑬ $x^2 - 6x + 10 = 0$

⑭ $2x^2 - 12x = -18$

⑮ $-5x^2 + 8x + 9 = 0$

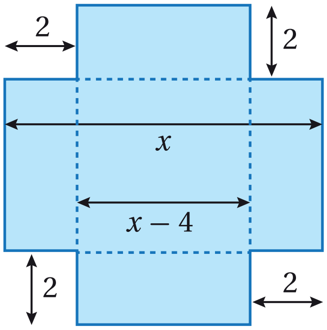
أَحُلُّ كلَّ مُعادلةٍ ممّا يأتي باستعمالِ أيِّ طريقةٍ، مُبرِّرًا سببَ اختيارِ الطريقةِ:

⑯ $x^2 + 4x = 15$

⑰ $9x^2 - 49 = 0$

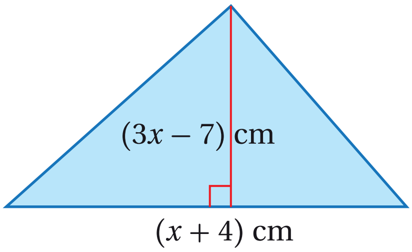
⑱ $x^2 + 4x - 60 = 0$

⑲ **صناعةٌ:** تجري صناعةُ صندوقٍ معدنيٍّ بقطعِ 4 مُربَّعاتٍ متطابقةٍ مِنْ زوايا صفيحةٍ معدنيَّةٍ طولُ ضلعِ كلِّ مُربَّعٍ منها 2 m، ثمَّ تُطوى الجوانبُ لتشكيلِ العلبةِ. إذا كانَ حجمُ العلبةِ $144\ m^2$، فَأَجِدُ أبعادَ الصفيحةِ الأصليَّةِ التي صُنِعَتْ منهَا العلبةُ، مُقرِّبًا إجابتي لأقربِ جُزءٍ مِنْ عشرَةٍ.



⑳ **حديقةٌ:** حديقةٌ مستطيلةُ الشكلِ يزيدُ طولُها على عرضِها بمقدارِ 5 m. إذا كانَتْ مساحتُها $60\ m^2$، فَأَجِدُ أبعادَهَا، مُقرِّبًا إجابتي لأقربِ جُزءٍ مِنْ مِئَةٍ.

21 **هندسةٌ:** يُبيِّنُ الشكلُ المُجاورُ مُثلَّثًا مساحتُهُ $10\ \text{cm}^2$. أَجِدُ قيمةَ x، مُقرِّبًا إجابتي لأقربِ جُزءٍ مِنْ عشرَةٍ.



22 أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ.

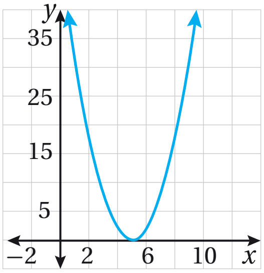
مهارات التفكير العليا

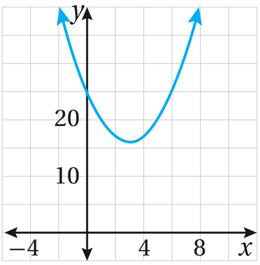
تبريرٌ: أَصِلُ كلَّ مُعادلةٍ في ما يأتي بالتمثيلِ البيانيِّ للاقترانِ المُرتبطِ بها، مُبرِّرًا إجابتي:

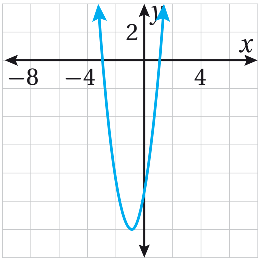
25 $3x^2 + 6x - 9 = 0$

24 $2x^2 - 20x + 50 = 0$

23 $x^2 - 6x + 25 = 0$







26 **تَحَدٍّ:** حَلَّتْ رنيمُ مُعادلةً تربيعيَّةً باستعمالِ القانونِ العامِّ فكانَتْ إجابتُها $x = \frac{3 \pm \sqrt{37}}{2}$. أَجِدُ المُعادلةَ التربيعيَّةَ التي حلَّتها رنيمُ.

27 **أكتشِفُ الخطأَ:** يقولُ نورٌ إنَّ مُمَيِّزَ المُعادلةِ $2x^2 + 5x - 1 = 0$ هُوَ 17. أكتشِفُ الخطأَ الذي وقعَ فيهِ نورٌ وَأُصَحِّحُهُ.

الدرس

6

حلُّ مُعادلاتٍ خاصَّةٍ
Solving Special Equations

فكرة الدرس حلُّ مُعادلاتٍ أُسُّ المُتَغَيِّرِ فيها عددٌ صحيحٌ موجبٌ أكبرُ مِنْ 2

المصطلحات الصورةُ التربيعيَّةُ.

مسألة اليوم كيسٌ للهدايا على شكلِ مُتوازي مستطيلاتٍ، حجمُهُ $1152\ \text{cm}^3$، وأبعادُهُ بدلالةِ المُتَغَيِّرِ w مُوَضَّحَةٌ فِي الشكلِ المُجاورِ. أَجِدُ أبعادَهُ.

تعلَّمتُ فِي الدروسِ السابقةِ حلَّ المُعادلاتِ التربيعيَّةِ بطرائقَ مُتنوِّعَةٍ، وسأتعلَّمُ في هذا الدرسِ حلَّ مُعادلاتٍ أُسُّ المُتَغَيِّرِ فيها عددٌ صحيحٌ موجبٌ أكبرُ مِنْ 2 باستعمالِ التحليلِ والتجميعِ وخاصيةِ الضَّربِ الصِّفريِّ.

أتعلَّمُ

أحتاجُ في بعضِ المُعادلاتِ إلى استعمالِ طرائقِ حلِّ المُعادلاتِ التربيعيَّةِ التي تعلَّمتُها سابقًا، بعدَ إخراجِ العاملِ المُشتَرَكِ الأكبرِ.

حلُّ المُعادلاتِ بإخراجِ العاملِ المُشترَكِ

تعلَّمتُ سابقًا أنَّ تحليلَ المقدارِ الجبريِّ بإخراجِ العاملِ المُشترَكِ لحدودِهِ هُوَ عمليَّةٌ عكسيَّةٌ لعمليَّةِ التوزيعِ، ويمكنُ الإفادةُ مِنْ إخراجِ العاملِ المُشترَكِ في تبسيطِ وحلِّ مُعادلاتٍ أُسُّ المُتَغَيِّرِ فيها عددٌ صحيحٌ أكبرُ مِنْ 2.

مثال 1

أَحُلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ:

1 $x^3 + 4x^2 = 5x$

المُعادلةُ المُعطاةُ $x^3 + 4x^2 = 5x$

بطرحِ $5x$ مِنْ طَرَفَيِ المُعادلةِ $x^3 + 4x^2 - 5x = 0$

بالتحليلِ بإخراجِ العاملِ المُشترَكِ الأكبرِ $x(x^2 + 4x - 5) = 0$

بالتحليلِ إلَى العواملِ $x(x + 5)(x - 1) = 0$

خاصيَّةُ الضَّربِ الصِّفريِّ $x = 0 \quad \text{or} \quad x+5 = 0 \quad \text{or} \quad x-1 = 0$

بحلِّ كلِّ مُعادلةٍ $x = -5 \qquad x = 1$

إذنْ، جذورُ المُعادلةِ $-5, 0, 1$

أتعلَّمُ

أكتبُ جميعَ حدودِ المُعادلةِ في الطرفِ الأيسرِ مِنَ المُعادلةِ قبلَ إخراجِ العاملِ المُشترَكِ.

2 $2x^3 = 18x$

المُعادلةُ المُعطاةُ	$2x^3 = 18x$
بإضافةِ $18x$ إلى طَرَفَي المُعادلةِ	$2x^3 - 18x = 0$
بالتحليلِ بإخراجِ العاملِ المُشترَكِ الأكبرِ	$2x(x^2 - 9) = 0$
بتحليلِ الفرقِ بينَ مُربَّعَيْنِ	$2x(x-3)(x+3) = 0$
خاصيَّةُ الضَّربِ الصِّفريِّ	$2x = 0$ or $x-3=0$ or $x+3=0$
بحلِّ كلِّ مُعادلةٍ	$x = 0$ $\quad x = 3 \quad x = -3$

إذنْ، جذورُ المُعادلةِ $-3, 0, 3$

أتحقَّق من فهمي أَحُلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ:

a) $x^3 + 12x = 7x^2$

b) $x^3 = 25x$

أتذكَّرُ

للتحقُّقِ مِنْ صِحَّةِ الحلِّ، أُعَوِّضُ قِيَمَ x فِي المُعادلةِ الأصليَّةِ.

حلُّ المُعادلاتِ بالتجميع

يمكنُ حلُّ المُعادلاتِ التي تحتوي على أربعةِ حُدودٍ جبريَّةٍ أوْ أكثرَ باستعمالِ طريقةِ التجميعِ، وذلكَ بتجميعِ الحُدودِ التي تحتوي على عواملَ مُشتَرَكَةٍ بينها، ثمَّ استعمالُ خاصيَّةِ الضَّربِ الصِّفريِّ لحلِّ المُعادلةِ.

أتذكَّرُ

يمكنُ تحليلُ المقدارِ الجبريِّ بالتجميعِ إذا تحقَّقتِ الشروطُ الآتيةُ جميعُها:

- إذا احتوى على أربعةِ حُدودٍ أوْ أكثرَ.
- إذا احتوى على عواملَ مُشتَرَكَةٍ بينَ الحُدودِ يمكنُ تجميعُها معًا.
- إذا احتوى على عاملَيْنِ مُشترَكَيْنِ مُتَساوِيَيْنِ أوْ كانَ أحدُهُما نظيرًا جمعيًّا للآخرِ.

مثال 2

أَحُلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ:

1 $x^3 - 2x^2 + 9x - 18 = 0$

المُعادلةُ المُعطاةُ	$x^3 - 2x^2 + 9x - 18 = 0$
بتجميعِ الحُدودِ ذاتِ العواملِ المُشتَرَكَةِ	$(x^3 - 2x^2) + (9x - 18) = 0$
بتحليلِ كلِّ تجميعٍ بإخراجِ العاملِ المُشترَكِ الأكبرِ	$x^2(x-2) + 9(x-2) = 0$
بإخراجِ $x-2$ عاملًا مُشترَكًا	$(x-2)(x^2+9) = 0$
خاصيَّةُ الضَّربِ الصِّفريِّ	$x - 2 = 0$ or $x^2 + 9 \neq 0$
بحلِّ المُعادلةِ	$x = 2$

إذنْ، للمُعادلةِ جذرٌ وحيدٌ هُوَ 2

أُفكِّرُ

لماذا $x^2 + 9 \neq 0$؟ أُبرِّرُ إجابتي.

② $4x^3 + 8x^2 - 5x - 10 = 0$

المُعادلةُ المُعطاةُ	$4x^3 + 8x^2 - 5x - 10 = 0$
بتجميعِ الحُدودِ ذاتِ العواملِ المُشترَكَةِ	$(4x^3 + 8x^2) + (-5x - 10) = 0$
بتحليلِ كلِّ تجميعٍ بإخراجِ العاملِ المُشترَكِ الأكبرِ	$4x^2 (x + 2) - 5(x + 2) = 0$
بإخراجِ $x+2$ عاملًا مُشترَكًا	$(x + 2)(4x^2 - 5) = 0$
خاصيَّةُ الضَّربِ الصِّفريِّ	$x + 2 = 0$ or $4x^2 - 5 = 0$
بحلِّ كلِّ المُعادلةِ	$x = -2$ $\quad$ $x = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$

إذنْ، جُذورُ المُعادلةِ $-2, -\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}$

أتذكَّرُ

تُستعمَلُ الجُذورُ التربيعيَّةُ لحلِّ المُعادلاتِ علَى الصورةِ $x^2 = d$

أتحقَّق من فهمي

أَحُلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ:

a) $9x^3 + 18x^2 + 2x + 4 = 0$

b) $2x^3 + x^2 - 14x - 7 = 0$

تحليلُ مجموعِ مُكَعَّبَيْنِ أو تحليلُ الفرقِ بينَهُما، وحلُّ معادلتِهِما

تعلَّمتُ سابقًا حالةً خاصَّةً مِنْ تحليلِ المقاديرِ الجبريَّةِ، هِيَ تحليلُ الفرقِ بينَ مُرَبَّعَيْنِ، وتوجدُ أيضًا حالةٌ خاصَّةٌ أُخرى مِنْ تحليلِ المقاديرِ الجبريَّةِ، هِيَ تحليلُ مجموعِ مُكَعَّبَيْنِ أوْ تحليلُ الفرقِ بينَهُما.

مفهومٌ أساسيٌّ

تحليلُ مجموعِ مُكَعَّبَيْنِ أوْ تحليلُ الفرقِ بينَهُما

- **تحليلُ مجموعِ مُكَعَّبَيْنِ**

مثالٌ	بالرُّموزِ
$x^3 + 27 = (x + 3)(x^2 - 3x + 9)$	$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

- **تحليلُ الفرقِ بينَ مُكَعَّبَيْنِ**

مثالٌ	بالرُّموزِ
$x^3 - 64 = (x - 4)(x^2 + 4x + 16)$	$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

يمكــنُ حلُّ مُعادلاتٍ تحتوي على مجمــوعِ مُكَعَّبَيْنِ أَوْ على الفرقِ بينَهُما باســتعمالِ طرائقِ التحليلِ الخاصَّةِ بكلٍّ منهما وخاصيَّةِ الضَّربِ الصِّفريِّ.

مثال 3

أَحُلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ:

1 $\mathbf{8x^3+1=0}$

المُعادلةُ المُعطاةُ $8x^3+1=0$

بالكتابةِ على صورةِ مجموعِ مُكَعَّبَيْنِ $(2x)^3+1^3=0$

بتجميعِ الحُدودِ ذاتِ العواملِ المُشترَكَةِ $(2x+1)(4x^2+2x+1)=0$

خاصيَّةُ الضَّربِ الصِّفريِّ $2x+1=0 \quad \text{or} \quad 4x^2+2x+1\neq 0$

بحلِّ المُعادلةِ $x=-\frac{1}{2}$

إذنْ، للمُعادلةِ جذرٌ وحيدٌ، هُوَ $-\frac{1}{2}$

أُفَكِّرُ

لماذا $4x^2+2x+1\neq 0$؟ أســتعملُ المُمَيِّـزَ لِأُبَرِّرَ إجابتي.

طريقةٌ بديلةٌ

يمكنُ حلُّ المُعادلةِ $8x^3+1=0$ بطريقةٍ أُخرى كالآتي:

المُعادلةُ المُعطاةُ $8x^3+1=0$

بطرحِ 1 مِنْ طَرَفَيِ المُعادلةِ $8x^3=-1$

بقسمةِ طَرَفَيِ المُعادلةِ على 8 $x^3=\frac{-1}{8}$

بأخذِ الجذرِ التكعيبيِّ للطرفَيْنِ $x=-\frac{1}{2}$

2 $\mathbf{x^3-125=0}$

المُعادلةُ المُعطاةُ $x^3-125=0$

بالكتابةِ على صورةِ الفرقِ بينَ مُكَعَّبَيْنِ $x^3-5^3=0$

بتجميعِ الحُدودِ ذاتِ العواملِ المُشترَكَةِ $(x-5)(x^2+5x+25)=0$

خاصيَّةُ الضَّربِ الصِّفريِّ $x-5=0 \quad \text{or} \quad x^2+5x+25\neq 0$

بحلِّ المُعادلةِ $x=5$

إذنْ، للمُعادلةِ جذرٌ وحيدٌ، هُوَ $x=5$

③ $\mathbf{128x^5 - 54x^2 = 0}$

المُعادلةُ المُعطاةُ	$128x^5 - 54x^2 = 0$
بالتحليلِ بإخراجِ العاملِ المُشترَكِ	$2x^2\,(64x^3 - 27) = 0$
بالكتابةِ على صورةِ الفرقِ بينَ مُكعَّبَيْنِ	$2x^2\,((4x)^3 - 3^3) = 0$
بتجميعِ الحُدودِ ذاتِ العواملِ المُشترَكةِ	$2x^2\,(4x-3)(16x^2 + 12x + 9) = 0$
خاصيَّةُ الضَّربِ الصِّفريِّ	$2x^2 = 0 \;\text{ or }\; 4x-3 = 0 \;\text{ or }\; 16x^2+12x+9 \neq 0$
بحلِّ كلِّ مُعادلةٍ	$x = 0 \qquad x = \frac{3}{4}$

إذنْ، جذرا المُعادلةِ $0, \frac{3}{4}$

أُتذكّر: أُحَلِّلُ أوَّلًا بإخراجِ العاملِ المُشترَكِ لتسهيلِ حلِّ المُعادلةِ.

أتحقَّق من فهمي

أَحُلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ:

a) $27x^3 - 1 = 0$

b) $x^3 + 1000 = 0$

c) $16x^4 - 250x = 0$

تحليلُ مُعادلاتٍ علَى الصورةِ التربيعيَّةِ

يُسَمَّى المقدارُ الجبريُّ المكتوبُ علَى الصورةِ $au^2 + bu + c$؛ حيثُ u مقدارٌ جبريٌّ، مقدارًا علَى **الصورةِ التربيعيَّةِ** (quadratic form)، ويمكنُ استعمالُ طرائقِ التحليلِ التي تعلَّمتُها سابقًا في حلِّ مُعادلاتٍ تحوي مقاديرَ علَى الصورةِ التربيعيَّةِ.

مثال 3

أَحُلُّ المُعادلةَ: $\mathbf{x^6 - 3x^3 - 40 = 0}$

الطريقةُ 1: التحليلُ

المُعادلةُ المُعطاةُ	$x^6 - 3x^3 - 40 = 0$
بالكتابةِ على صورةِ المُعادلةِ التربيعيَّةِ	$(x^3)^2 - 3x^3 - 40 = 0$
بتحليلِ الفرقِ بينَ مُربَّعَيْنِ	$(x^3 - 8)(x^3 + 5) = 0$
خاصيَّةُ الضَّربِ الصِّفريِّ	$x^3 - 8 = 0 \quad \text{or} \quad x^3 + 5 = 0$
بحلِّ كلِّ المُعادلةِ	$x = 2 \qquad x = \sqrt[3]{-5}$

إذنْ، جذرا المُعادلةِ $2, \sqrt[3]{-5}$

أُفكِّرُ: هلْ يمكنُ حلُّ المُعادلةِ $x^3 + 5 = 0$ بطريقةٍ أخرى؟ أُبرِّرُ إجابتي.

الطريقةُ 2: التعويضُ

أفترِضُ أنَّ $u = x^3$

المُعادلةُ المُعطاةُ	$x^6 - 3x^3 - 40 = 0$
بتعويضِ $x^3 = u$	$u^2 - 3u - 40 = 0$
بتحليلِ الفرقِ بينَ مُربَّعَيْنِ	$(u - 8)(u + 5) = 0$
خاصيَّةُ الضَّربِ الصِّفريِّ	$u - 8 = 0 \quad \text{or} \quad u + 5 = 0$
بحلِّ كلِّ المُعادلةِ	$u = 8 \qquad u = -5$
بتعويضِ $u = x^3$	$x^3 = 8 \qquad x^3 = -5$
بأخذِ الجذرِ التكعيبيِّ لِطَرَفَيْ كلِّ مُعادلةٍ	$x = 2 \qquad x = \sqrt[3]{-5}$

إذنْ، جذرا المُعادلةِ $2, \sqrt[3]{-5}$

خطأٌ شائعٌ

يُخطِئُ بعضُهُم بالتوقُّفِ عندَ هذهِ النقطةِ مِنْ غيرِ إكمالِ الحلِّ وإيجادِ قيمةِ x التي تحلُّ المُعادلةَ.

أتحقَّق من فهمي

أَحُلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ:

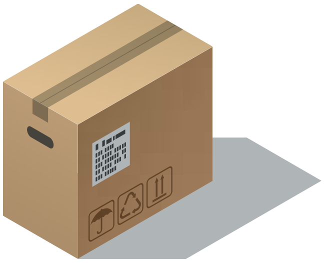
a) $x^4 - 625 = 0$

b) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

لحلِّ المُعادلاتِ التي أُسُّ المُتَغيِّرِ فيها عددٌ صحيحٌ أكبرُ مِنْ 2 الكثيرُ مِنَ التطبيقاتِ الحياتيَّةِ.

مثال 5 : من الحياة

صناعةٌ: تصنعُ شركةٌ صناديقَ لحفظِ البضائعِ على شكلِ مُتوازي مستطيلاتٍ، طولُها يقلُّ 30 cm عَنِ ارتفاعِها، وعرضُها يقلُّ 90 cm عَنِ ارتفاعِها. إذا كانَ حجمُ الصندوقِ $324000\ \text{cm}^3$، فَأَجِدُ أبعادَهُ.



أفترِضُ أنَّ طولَ الصندوقِ l، وَعرضَهُ w، وارتفاعَهُ h، وحجمَهُ V.

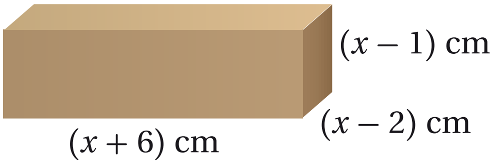
طولُ الصندوقِ: $l = h - 30$

عرضُ الصندوقِ: $w = h - 90$

حجمُ مُتوازِي المستطيلاتِ	$V = l \times w \times h$
بتعويضِ $V = 324000$, $l = h-30$, $w = h-90$	$324000 = (h-30)(h-90)h$
باستعمالِ خاصيَّةِ التوزيعِ	$324000 = h^3 - 120h^2 + 2700h$
بطرحِ 324000 مِنْ طَرَفَي المُعادلةِ	$h^3 - 120h^2 + 2700h - 324000 = 0$
بتجميعِ الحُدودِ ذاتِ العواملِ المُشترَكَةِ	$(h^3 - 120h^2) + (2700h - 324000) = 0$
بتحليلِ كلِّ تجميعٍ بإخراجِ العاملِ المُشترَكِ الأكبرِ	$h^2(h-120) + 2700(h-120) = 0$
بإخراجِ $h-120$ عاملًا مُشترَكًا	$(h-120)(h^2+27) = 0$
خاصيَّةُ الضَّربِ الصِّفريِّ	$h-120 = 0$ or $h^2 + 27 \neq 0$
بحلِّ المُعادلةِ	$h = 120$

إذنْ، ارتفاعُ الصندوقِ 120 cm، ومنهُ فإنَّ طولَهُ 90 cm، وعرضَهُ 30 cm

أتحقَّق من فهمي



صناعةٌ: تصنعُ شركةٌ صناديقَ لجهازٍ إلكترونيٍّ على شكلِ مُتوازي مستطيلاتٍ، أبعادُها كما هُوَ مُبيَّنٌ في الشكلِ المُجاورِ. إذا كانَ حجمُ الصندوقِ $60\ \text{cm}^3$، فَأَجِدُ أبعادَهُ.

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أَحُلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ:

1. $3x^4 - 12x^3 = 0$
2. $35x^3 - 28x^2 - 7x = 0$
3. $6x^6 - 3x^4 - 9x^2 = 0$
4. $2x^3 + 4x^2 + 2x = 0$
5. $3x^3 = 12x$
6. $x^3 + 4x^2 + 4x = 0$
7. $2x^3 - 3x^2 - 4x + 6 = 0$
8. $10x^2 - 15x + 2x - 3 = 0$
9. $x^3 - 3x^2 + x - 3$

10 $125x^3 - 1 = 0$

11 $3x^3 + 3000 = 0$

12 $x^4 + x^3 - 12x - 12 = 0$

13 $5x^3 - 320 = 0$

14 $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

15 $2x^4 - 9x^2 + 5 = 0$

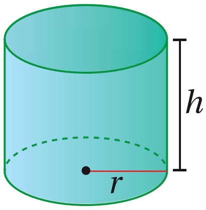
16 $4x^4 + 20x^2 = -25$

17 $16x^4 - 81 = 0$

18 $5w^6 - 25w^3 + 30 = 0$

19 **مشــاريعُ صغيرةٌ:** يُمَثِّلُ الاقترانُ $R(t) = t^3 - 8t^2 + t + 15$ الإيرادَ السـنويَّ (بالألفِ دينارٍ) لمشروعِ غيداءَ الصغيرِ بعدَ t عامًا مِنْ إنشائِهِ. بعدَ كمْ سنةٍ يصلُ إيرادُ غيداءَ إلى 23 ألفَ دينارٍ؟

20 **هندسةٌ:** يُبيِّنُ الشكلُ المُجاوِرُ أُسطوانةً حجمُها $25\pi h \text{ cm}^3$. إذا كانَ طولُ نصفِ قطرِ قاعدةِ الأُسطوانةِ يقلُّ عَنِ ارتفاعِها بمقدارِ 3 cm، فَأَجِدُ أبعادَها.



21 أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ.

مهارات التفكير العليا

22 **أكتشِفُ الخطأَ:** حَلَّتْ نداءُ المُعادلةَ $2x^4 - 18x^2 = 0$، كما هُوَ مُبَيَّنٌ في أدناهُ. أكتشِفُ الخطأَ في حلِّها وَأُصَحِّحُهُ.

$$2x^4 - 18x^2 = 0$$
$$2x^2(x^2 - 9) = 0$$
$$x^2 - 9 = 0$$
$$(x + 3)(x - 3) = 0$$
$$x = -3 \quad \text{or} \quad x = 3$$

تَحَدٍّ: أَحُلُّ المُعادلتَيْنِ الآتيتَيْنِ، مُبَرِّرًا إجابتي:

23 $x^6 + 4x^3 = 2$

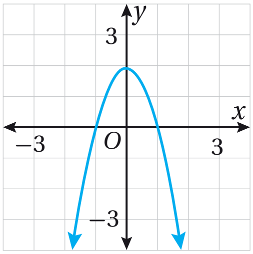
24 $(x^2 - 1)^2 - 2(x^2 - 1) = 3$

25 **تبريرٌ:** أَجِدُ قيمةَ w التي تجعلُ للمُعادلةِ $5x^3 + wx^2 + 80x = 0$ حَلَّيْنِ حقيقيَّيْنِ فقط، مُبَرِّرًا إجابتي.

اختبار نهاية الوحدة

أختارُ رمزَ الإجابةِ الصحيحةِ لكلٍّ ممّا يأتي:

1 أيُّ الآتيةِ يُمَثِّلُ أحدَ حُلولِ المُعادلةِ التربيعيَّةِ فِي الشكلِ المُجاورِ:



a) 0

b) 2

c) 1

d) 3

2 جذرا المُعادلةِ $3x^2 - 48 = 0$، هُما:

a) $-2, 2$

b) $-4, 4$

c) $-16, 16$

d) $6, -6$

3 جذرا المُعادلةِ $x^2 - 17x + 42 = 0$، هُما:

a) $1, 42$

b) $2, 21$

c) $3, 14$

d) $6, 7$

4 جذرا المُعادلةِ $2x^2 - x - 3 = 0$، هُما:

a) $-\frac{2}{3}, 1$

b) $\frac{2}{3}, -1$

c) $-\frac{3}{2}, 1$

d) $\frac{3}{2}, -1$

5 مُستطيلٌ مساحتُهُ $(3x^2 + 22x + 24)$ وحدةً مُرَبَّعةً. أيُّ الآتيةِ يُمَثِّلُ محيطَهُ؟

a) $4x + 10$

b) $4x + 24$

c) $8x + 20$

d) $8x + 50$

6 أيُّ المقاديرِ الجبريَّةِ الآتيةِ ليسَ مُرَبَّعًا كاملًا؟

a) $x^2 - 26x + 169$

b) $x^2 + 32x + 256$

c) $x^2 + 30x - 225$

d) $x^2 - 44x + 484$

أَحُلُّ المُعادلاتِ الآتيةَ بيانيًّا:

7 $-x^2 + 7x - 12 = 0$

8 $x^2 - 8x + 16 = 0$

9 $-x^2 - 6x = 9$

10 $3x^2 - 27 = 0$

11 $x^2 + 5x = -8$

أَحُلُّ المُعادلاتِ الآتيةَ:

12 $x^2 - 3x - 10 = 0$

13 $x^2 - 8x + 15 = 0$

14 $m^2 + 10m + 25 = 0$

15 $25t^2 - 49 = 0$

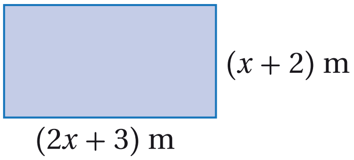
16 $12x^2 - 16x - 35 = 0$

17 $10x^2 - x = 2$

18 $25x^2 = 10 - 45x$

19 يُمَثِّلُ الاقترانُ $h(t) = -16t^2 + 8t$ ارتفاعَ جندبٍ بالسنتيمترِ بعدَ t ثانيةً مِنْ قفزِهِ. بعدَ كمْ ثانيةٍ يصلُ إلى ارتفاعِ 1 cm عَنْ سطحِ الأرضِ؟

20 يُبيِّنُ الشكلُ الآتي مستطيلًا مساحتُهُ $91\ m^2$. أَجِدُ أبعادَهُ، مُقَرِّبًا إجابتي لأقربِ جُزْءٍ مِنْ عشرةٍ.



اختبار نهاية الوحدة

أُحَلِّلُ كُلًّا ممّا يأتي:

21 $2x^2 + 13x + 20$

22 $7y^2 + 16y - 15$

23 $2t^2 - t - 3$

24 $8y^2 - 10y - 3$

25 $2q^2 - 11 - 21$

26 $10w^2 + 11w - 8$

27 يُمَثِّلُ الاقترانُ $h(t) = -5t^2 + 30t$ ارتفاعَ صاروخٍ للألعابِ الناريَّةِ بعدَ t ثانيةً مِنْ قذفِهِ. بعدَ كَمْ ثانيةٍ مِنْ إطلاقِهِ يصلُ الصاروخُ إلَى الأرضِ؟

أَحُلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ بإكمالِ المُرَبَّعِ، تاركًا الإجابةَ بدلالةِ الجذرِ التربيعيِّ:

28 $x^2 + 6x + 7 = 0$

29 $x^2 - 3x - 1 = 0$

30 $x^2 - 9x + 10 = 0$

31 $x^2 - 2x - 7 = 0$

32 **فناءٌ:** فناءُ منزلٍ على شكلِ مُستطيلٍ يزيدُ طولُهُ على عرضِهِ بمقدارِ $6\ \text{m}$، ومساحتُهُ $216\ \text{m}^2$. أَجِدُ أبعادَهُ، مُستعملًا إكمالَ المُرَبَّعِ.

أَحُلُّ المُعادلاتِ الآتيةَ بإكمالِ المُرَبَّعِ، مُقَرِّبًا إجابتي لأقربِ جُزءٍ مِنْ عشرةٍ (إنْ لَزِمَ):

33 $x^2 - 10x = 24$

34 $x^2 + x - 1 = 0$

35 $2x^2 + 20x - 10 = 0$

36 $3x^2 - 6x - 9 = 0$

أَحُلُّ المُعادلاتِ الآتيةَ بالقانونِ العامِّ، مُقَرِّبًا إجابتي لأقربِ جُزءٍ مِنْ عشرةٍ (إنْ لَزِمَ):

37 $5x^2 + 2x - 1 = 0$

38 $7x^2 + 12x = -2$

39 $3x^2 + 11x = -9$

أَحُلُّ كلَّ مُعادلةٍ ممّا يأتي باستعمالِ أيِّ طريقةٍ، مُبَرِّرًا سببَ اختيارِ الطريقةِ:

40 $2x^2 + 7x = 0$

41 $4x^2 + 8x - 5 = 0$

42 $x^2 - 2x = 5$

أَحُلُّ المُعادلاتِ الآتيةَ:

43 $3x^4 = 27x^2$

44 $x^3 + x^2 = 4x + 4$

45 $2x^3 + 3x^2 = 8x + 12$

46 $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$

تدريب على الاختبارات الدولية

47 أيُّ قِيَمِ c الآتيةِ تجعلُ المُعادلةَ $5x^2 + c = 10$ بلا حلٍّ؟

a) 1 **b)** 5 **c)** 9 **d)** 12

48 أيُّ الآتيةِ يُعَدُّ عاملًا ثُلاثيَّ الحُدودِ $13x^2 + 32x - 21$؟

a) $13x + 3$ **b)** $13x + 7$

c) $13x + 21$ **d)** $13x - 7$

49 أيُّ الآتيةِ يجعلُ المقدارَ $x^2 + 14x$ مُرَبَّعًا كاملًا؟

a) 7 **b)** 14 **c)** 49 **d)** 196

50 عددُ الحُلولِ الحقيقيَّةِ للمُعادلةِ $x^2 + 7x = -11$، هُوَ:

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 3

الوحدة
4

الهندسةُ الإحداثيَّةُ
Coordinate Geometry

ما أهميَّةُ هذهِ الوحدةِ؟

الهندسةُ الإحداثيَّةُ عمادُ نظامِ تحديدِ المواقعِ العالميِّ (GPS)، وهيَ تُستخدَمُ فِي الكثيرِ مِنَ التطبيقاتِ العلميَّةِ والحياتيَّةِ المهمَّةِ، مثلِ أجهزةِ الرادارِ التي ترصدُ حركةَ السُّفُنِ والطائراتِ وتنظِّمُها، كما تُستخدَمُ في تخطيطِ الطرقِ والحدائقِ.

تعلَّمتُ سابقًا:

- ✓ إيجادَ ميلِ خطٍّ مستقيمٍ ومعادلتِهِ.
- ✓ حلَّ نظامٍ مِنْ مُعادلَتَيْنِ خَطِّيَّتَيْنِ.
- ✓ الشروطَ التي تؤكِّدُ أنَّ شكلًا رُباعيًّا مُتوازي أضلاعٍ.
- ✓ تحديدَ ما إذا كانَ مُتوازي الأضلاعِ مستطيلًا أوْ مَعينًا أوْ مُرَبَّعًا.

سأتعلَّمُ في هذهِ الوحدةِ:

- حلَّ المُعادلةِ التربيعيَّةِ بيانيًّا.
- حلَّ المُعادلةِ التربيعيَّةِ بالتحليلِ.
- حلَّ المُعادلةِ التربيعيَّةِ بإكمالِ المُرَبَّعِ.
- حلَّ المُعادلةِ التربيعيَّةِ باستعمالِ القانونِ العامِّ.

أستعمل تدريبات (أستعد لدراسة الوحدة) في الصفحات (6 و 7 و 8) من كتاب التمارين؛ لمراجعة هذه الموضوعات قبل البدء بدراسة الوحدة.

الدرس 1

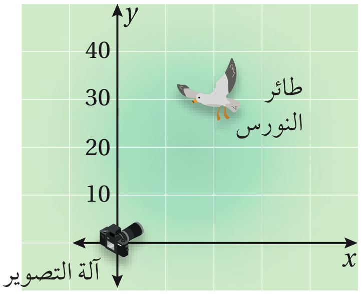
المسافةُ فِي المُستوى الإحداثِيِّ
Distance in the Coordinate Plane

فكرة الدرس

- إيجادُ المسافةِ بينَ نقطتَيْنِ فِي المُستوى الإحداثِيِّ.
- إيجادُ نقطةِ مُنتصفِ قطعةٍ مستقيمةٍ فِي المُستوى الإحداثِيِّ.

المصطلحات المسافةُ، إحداثِيٌّ، نقطةُ المُنتصفِ.

مسألة اليوم تلتقطُ آلةُ تصويرٍ صورًا عاليةَ الدقةِ للطيورِ إذا كانَتْ تبعدُ عنها مسافةً أقلَّ مِنْ 50 m. هلْ تلتقطُ الآلةُ صورةً عاليةَ الدقةِ لطائرِ النورسِ المُوَضَّحِ موقعُهُ بالنسبةِ إليها فِي المُستوى الإحداثِيِّ المُجاورِ؟

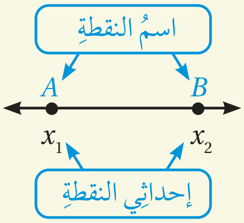


المسافة بالمتر

المسافةُ بينَ نقطتَيْنِ

المسافةُ (distance) بينَ نقطتَيْنِ هِيَ طولُ القطعةِ المستقيمةِ الواصلةِ بينَ هاتَيْنِ النقطتَيْنِ بحيثُ تُمثِّلانِ نهايتَي القطعةِ، ويمكنُ استعمالُ **إحداثِيِّ** (coordinate) كلٍّ مِنَ النقطتَيْنِ لإيجادِ المسافةِ بينَهُما.

أتعلَّمُ

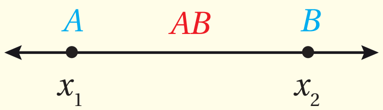


مفهومٌ أساسيٌّ

صيغةُ المسافةِ على خطِّ الأعدادِ

بالكلماتِ: المسافةُ بينَ نقطتَيْنِ على خطِّ الأعدادِ هِيَ القيمةُ المُطلقةُ للفرقِ بينَ إحداثِيَّيْهِما.

بالرُّموزِ: إذا كانَ إحداثِيُّ النقطةِ A على خطِّ الأعدادِ هُوَ x_1 وَإحداثِيُّ النقطةِ B هُوَ x_2، فإنَّ:



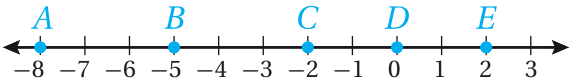
$$AB = |x_2 - x_1| \quad \text{or} \quad |x_1 - x_2|$$

رُموزٌ رياضيَّةٌ

يُرمَزُ للقطعةِ المستقيمةِ التي نقطةُ بدايتِها A ونهايتِها B بالرَّمزِ $\overline{AB}$، أمّا طولُها فيُرمَزُ له بالرَّمزِ AB.

مثال 1

أستعمِلُ خطَّ الأعدادِ المُجاورِ لِأَجِدَ BE.



بما أنَّ إحداثِيَّ النقطةِ B هُوَ -5، وَإحداثِيَّ النقطةِ E هُوَ 2، فإنَّ:

صيغةُ المسافةِ على خطِّ الأعدادِ	$BE = \|x_2 - x_1\|$
بتعويضِ $x_2 = 2, x_1 = -5$	$= \|2 - (-5)\|$
بالتبسيطِ	$= 7$

أتعلَّمُ

بما أنَّ $\overline{BE}$ هُوَ نفسُهُ $\overline{EB}$، فإنَّ ترتيبَ اسمِ النقطتَيْنِ غيرُ مهمٍّ عندَ إيجادِ المسافةِ بينَهُما.

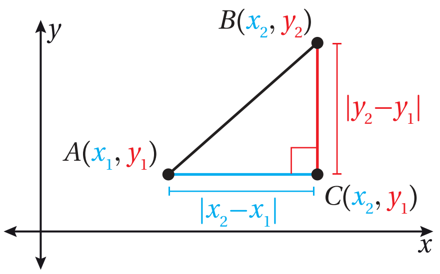
أتحقَّق من فهمي

أستعمِلُ خطَّ الأعدادِ المُبيَّنَ في أعلاهُ لِأَجِدَ كُلًّا ممّا يأتي:

a) AD

b) BC

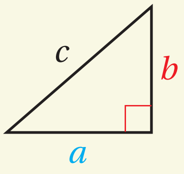
يُمكِنُني إيجادُ المسافةِ بينَ النقطتَيْنِ A وَ B فِي المُستوى الإحداثِيِّ باستعمالِ نظريَّةِ فيثاغورس، وذلكَ بتشكيلِ مُثلَّثٍ قائمِ الزاويةِ يكونُ $\overline{AB}$ وَترًا فيهِ، كما فِي الشكلِ المُجاورِ، ثمَّ أستعمِلُ النظريَّةَ نفسَها لِأَجِدَ AB كالآتي:



نظريَّةُ فيثاغورس	$(AC)^2 + (CB)^2 = (AB)^2$
بتعويضِ $AC = \|x_2 - x_1\|$, $CB = \|y_2 - y_1\|$	$(\|x_2 - x_1\|)^2 + (\|y_2 - y_1\|)^2 = (AB)^2$
مُربَّعاتُ الأعدادِ دائمًا موجبةٌ	$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (AB)^2$
بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ لِطرَفَيِ المُعادلةِ	$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = AB$

أتذكَّرُ

نظريَّةُ فيثاغورس



$a^2 + b^2 = c^2$

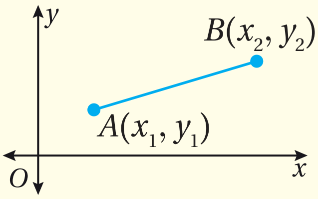
تُسمَّى الصيغةُ التي توصَّلْتُ إليها مِنْ نظريَّةِ فيثاغورس صيغةَ المسافةِ بينَ نقطتَيْنِ فِي المُستوى الإحداثِيِّ.

مفهومٌ أساسيٌّ

صيغةُ المسافةِ فِي المُستوى الإحداثِيِّ

المسافةُ بينَ النقطتَيْنِ $A(x_1 , y_1)$ وَ $B(x_2 , y_2)$، هِيَ:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



مثال 2

أَجِدُ المسافةَ بينَ النقطتَيْنِ **$P(-7, 5)$ وَ $Q(4, -3)$**، مُقَرِّبًا إجابتي لأقربِ جُزْءٍ مِنْ عشرَةٍ.

صيغةُ المسافةِ فِي المُستوى الديكارتِيِّ

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

بالتعويضِ $(x_1 , y_1) = (-7, 5)$, $(x_2 , y_2) = (4, -3)$

$$= \sqrt{(4 - (-7)^2 + ((-3) - 5)^2}$$

بالتبسيطِ

$$= \sqrt{(11)^2 + (-8)^2}$$

بإيجادِ مُرَبَّعِ كلِّ عددٍ، والجمع

$$= \sqrt{185}$$

باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

$$\approx 13.6$$

إذنْ، المسافةُ بينَ النقطتَيْنِ Q وَ P هِيَ 13.6 وحدةً تقريبًا.

أتعلَّمُ

عندَ إيجادِ المسافةِ بينَ نقطتَيْنِ فِي المُستوى الإحداثِيِّ لا يكونُ ترتيبُ الإحداثِيَّيْنِ x وَ y في كلِّ مجموعةٍ مِنَ الأقواسِ مهمًّا.

أتحقَّقُ من فهمي

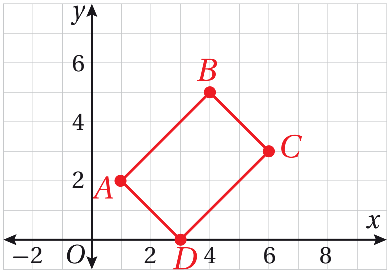
أَجِدُ المسافةَ بينَ كلِّ نقطتَيْنِ ممّا يأتي، مُقَرِّبًا إجابتي لأقربِ جُزْءٍ مِنْ عشرَةٍ (إنْ لَزِمَ):

a) $C(5, 0), D(-7, 9)$

b) $G(4, -2), H(8, -8)$

يمكنُ استعمالُ قانونِ المسافةِ فِي تطبيقاتٍ حياتيَّةٍ، مثلِ إيجادِ المساحةِ والمحيطِ فِي المُخَطَّطاتِ الهندسيَّةِ.

مثال 3 : من الحياة



حديقةٌ: يظهرُ فِي المُستوى الإحداثِيِّ المُجاورِ مُخَطَّطُ بيتٍ بلاستيكيٍّ مستطيلِ الشكلِ بَنَتْهُ غيداءُ فِي فناءِ منزلِها الخلفيِّ لزراعةِ النباتاتِ. إذا كانتْ كلُّ وحدةٍ فِي المُستوى الإحداثِيِّ تُمَثِّلُ مِترًا واحدًا، فَأَجِدُ مساحةَ البيتِ البلاستيكيِّ، مُقَرِّبًا إجابتي لأقربِ جُزءٍ مِنْ عشرَةٍ.

لإيجادِ مساحةِ البيتِ البلاستيكيِّ، أَجِدُ طولَهُ وعرضَهُ باستعمالِ صيغةِ المسافةِ فِي المُستوى الإحداثِيِّ.

الخُطوةُ 1: أَجِدُ طولَ البيتِ البلاستيكيِّ.

أفترِضُ أنَّ طولَ البيتِ AB، ومنهُ:

صيغةُ المسافةِ فِي المُستوى الديكارتيِّ

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

بالتعويضِ $(x_1, y_1)=(1, 2), (x_2, y_2)=(4, 5)$

$$=\sqrt{(4-1)^2+(5-2)^2}$$

بالتبسيطِ

$$=\sqrt{(3)^2+(3)^2}$$

بإيجادِ مُرَبَّعِ كلِّ عددٍ، والجمعِ

$$=\sqrt{18}$$

باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

$$\approx 4.2$$

إذنْ، طولُ البيتِ البلاستيكيِّ 4.2 m تقريبًا.

الخُطوةُ 2: أَجِدُ عرضَ البيتِ البلاستيكيِّ.

أفترِضُ أنَّ عرضَ البيتِ البلاستيكيِّ BC، ومنهُ:

صيغةُ المسافةِ فِي المُستوى الديكارتيِّ

$$BC=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

بالتعويضِ $(x_1, y_1)=(4, 5), (x_2, y_2)=(6, 3)$

$$=\sqrt{(6-4)^2+(3-5)^2}$$

بالتبسيطِ

$$=\sqrt{(2)^2+(-2)^2}$$

بإيجادِ مُرَبَّعِ كلِّ عددٍ، والجمعِ

$$=\sqrt{8}$$

باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

$$\approx 2.8$$

إذنْ، عرضُ البيتِ البلاستيكيِّ 2.8 m تقريبًا.

معلومةٌ

للبيوتِ البلاستيكيَّةِ العديدُ مِنَ المُمَيِّزاتِ، مثلُ توفيرِ درجةِ حرارةٍ مناسبةٍ لنموِّ النباتاتِ؛ ما يتيحُ إمكانيَّةَ الزراعةِ في أيِّ وقتٍ مِنَ العامِ.

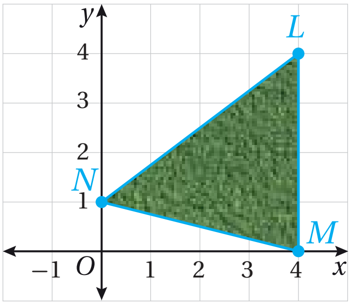
الخُطوةُ 3: أَجِدُ مساحةَ البيتِ البلاستيكيِّ.

صيغةُ مساحةِ المستطيلِ	$A = l \times w$
بتعويضِ $l = 4.2,\ w = 2.8$	$= 4.2 \times 2.8$
بالتبسيطِ	$= 11.76$

إذنْ، مساحةُ البيتِ البلاستيكيِّ $11.76\ \text{m}^2$ تقريبًا.

أتحقَّق من فهمي

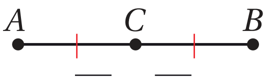
يظهرُ في المُستوى الإحداثيِّ المُجاورِ مُخَطَّطُ حديقةٍ مُثَلَّثةِ الشكلِ، يرغبُ خالدٌ في تركيبِ مِرَشّاتٍ لريِّها عندَ رؤوسِ المُثَلَّثِ. إذا كانتْ كلُّ وحدةٍ في المُستوى الإحداثيِّ تُمَثِّلُ مترًا واحدًا، فَأَجِدُ طولَ الأنابيبِ التي تصلُ بينَ المِرَشّاتِ الثلاثةِ، مُقَرِّبًا إجابتي لأقربِ جُزءٍ مِنْ عشرةٍ.



نقطةُ مُنتصفِ القطعةِ المستقيمةِ

نقطةُ مُنتصفِ القطعةِ المستقيمةِ (midpoint) هِيَ النقطةُ التي تقعُ في مُنتصفِ المسافةِ بينَ نقطتَيْ نهايتَيِ القطعةِ المستقيمةِ.

فمثلًا، إذا كانتْ C نقطةَ مُنتصفِ $\overline{AB}$، فإنَّ $AC = CB$، وهذا يعني أنَّ $\overline{AC} \cong \overline{CB}$.



$\overline{AC} \cong \overline{CB}$

أتذكَّر

يدلُّ الرَّمزُ $\cong$ علَى التطابقِ، وتدلُّ الإشارةُ الحمراءُ في الشكلِ المُجاورِ علَى أنَّ $\overline{AC} \cong \overline{CB}$.

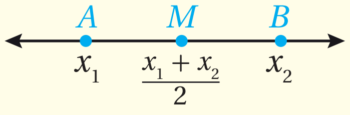
يُمكِنُني إيجادُ نقطةِ مُنتصفِ قطعةٍ مستقيمةٍ على خطِّ الأعدادِ بإيجادِ الوسطِ الحسابيِّ لإحداثيَّيْ نقطتَيْ نهايتَيْهِ.

مفهومٌ أساسيٌّ

صيغةُ نقطةِ المُنتصفِ على خطِّ الأعدادِ

إذا كانَ إحداثيُّ النقطةِ A على خطِّ الأعدادِ هُوَ x_1 وَإحداثيُّ النقطةِ B هُوَ x_2، وكانتْ M نقطةَ مُنتصفِ $\overline{AB}$، فإنَّ إحداثيَّ M هُوَ:

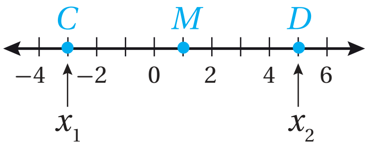
$$\frac{x_1 + x_2}{2}$$



مثال 4

1 **إذا كانَ إحداثيّا نقطتَيْ نهايَتَيْ $\overline{CD}$ هُما -3 وَ 5، فَأَجِدُ إحداثيَّ نقطةِ مُنتصفِ $\overline{CD}$.**

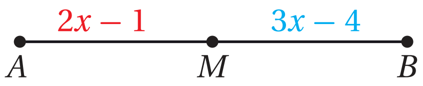
أفترِضُ أنَّ $x_1 = -3$ وَ $x_2 = 5$، وأنَّ نقطةَ مُنتصفِ $\overline{CD}$ هِيَ M.



صيغةُ نقطةِ المُنتصفِ على خطِّ الأعدادِ	$\frac{x_1 + x_2}{2}$
بتعويضِ $x_1 = -3, x_2 = 5$	$= \frac{-3 + 5}{2}$
بالتبسيطِ	$= \frac{2}{2} = 1$

إذنْ، إحداثيُّ نقطةِ المُنتصفِ هُوَ 1

2 **في الشكلِ المُجاورِ، إذا كانتْ M نقطةَ مُنتصفِ $\overline{AB}$، فَأَجِدُ طولَ $\overline{MB}$.**



الخُطوةُ 1: أَجِدُ قيمةَ x.

تعريفُ نقطةِ مُنتصفِ قطعةٍ مستقيمةٍ	$\overline{AM} \cong \overline{MB}$
تعريفُ تطابقِ القطعِ المستقيمةِ	$AM = MB$
بالتعويضِ	$2x + 1 = 3x - 4$
بجمعِ 4 إلى طَرَفَي المُعادلةِ	$2x + 5 = 3x$
بطرحِ $2x$ مِنْ طَرَفَي المُعادلةِ	$5 = x$

الخُطوةُ 2: أَجِدُ طولَ $\overline{MB}$.

تعريفُ تطابقِ القطعِ المستقيمةِ	$MB = 3x-4$
بتعويضِ $x = 5$	$= 3(5)-4$
بالتبسيطِ	$=11$

إذنْ، طولُ $\overline{MB}$ هُوَ 11 وحدةَ طولٍ.

أتحقَّقُ من فهمي

a) إذا كانَ إحداثيّا نقطتَيْ نهايَتَيْ $\overline{PT}$ هُما -9 وَ 10، فَأَجِدُ إحداثيَّ نقطةِ مُنتصفِ $\overline{PM}$.

b) في الشكلِ المُجاورِ، إذا كانتْ M نقطةَ مُنتصفِ $\overline{VW}$، فَأَجِدُ طولَ $\overline{VM}$.

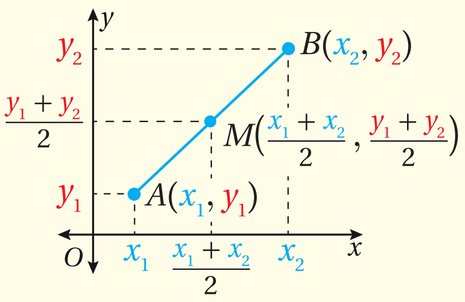
يمكنُ إيجادُ إحداثِيَّيْ نقطةِ مُنتصفِ قطعةٍ مستقيمةٍ فِي المُستوى الإحداثِيِّ بإيجادِ الوسطِ الحسابيِّ لكلٍّ مِنَ الإحداثِيِّ x والإحداثِيِّ y لِنُقطتَيْ نهايَتَيْهِ.

مفهومٌ أساسيٌّ

صيغةُ نقطةِ المُنتصفِ فِي المُستوى الإحداثيِّ

إذا كانَتْ $A(x_1 , y_1)$ وَ $B(x_2 , y_2)$ نقطتَيْنِ فِي المُستوى الإحداثِيِّ، وَ M نقطةَ مُنتصفِ $\overline{AB}$، فَإنَّ إحداثِيَّيْ M هُما:

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2} , \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$



مثال 5

أَجِدُ إحداثِيَّيِ النقطةِ M، التي تُمَثِّلُ مُنتصفَ $\overline{PQ}$؛ حيثُ $P(-6, 3)$ وَ $Q(1, -1)$.

صيغةُ نقطةِ المُنتصفِ فِي المُستوى الإحداثيِّ $$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2} , \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

بالتعويضِ $(x_1 , y_1) = (1, -1)$, $(x_2 , y_2) = (-6, 3)$ $$M\left(\frac{-6 + 1}{2} , \frac{3 + (-1)}{2}\right)$$

بالتبسيطِ $$M\left(\frac{-5}{2} , 1\right)$$

إذنْ، إحداثِيّا النقطةِ M مُنتصفِ $\overline{PQ}$، هُما $\left(\frac{-5}{2} , 1\right)$

أتعلَّم

ترتيبُ إحداثِيَّــيْ نقطتَيْ نهايَتَيِ القطعةِ المستقيمةِ ليس مهمًّــا عنــدَ إيجادِ إحداثِيَّيْ نقطــةِ مُنتصفِ قطعةٍ مستقيمةٍ.

أتحقَّق من فهمي

أَجِدُ إحداثِيَّيِ النقطةِ M، التي تُمَثِّلُ مُنتصفَ $\overline{HI}$؛ حيثُ $H(5, -3)$ وَ $I(-1, -7)$.

يمكنُ إيجادُ إحداثِيَّيْ نقطةِ نهايةِ قطعةٍ مستقيمةٍ إذا عُلِمَ إحداثِيّا نقطةِ النهايةِ الأُخرى للقطعةِ وإحداثِيّا نقطةِ المُنتصفِ.

مثال 6

إذا كانتْ $M(2, 1)$ نقطةَ مُنتصفِ $\overline{JK}$؛ حيثُ $J(1, 4)$، فَأَجِدُ إحداثيَّي النقطةِ K.

الخُطوةُ 1: أُعَوِّضُ الإحداثياتِ المعلومةَ في صيغةِ نقطةِ المُنتصفِ.

أفترِضُ أنَّ $J(x_1 , y_1)$ وَ $K(x_2 , y_2)$.

صيغةُ نقطةِ المُنتصفِ

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = M(2, 1)$$

بالتعويضِ $(x_1 , y_1) = (1, 4)$

$$M\left(\frac{1 + x_2}{2}, \frac{4 + y_2}{2}\right) = M(2, 1)$$

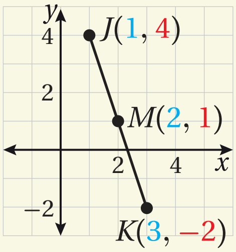
الخُطوةُ 2: أكتبُ مُعادلَتَيْنِ، وَأَحُلُّهُما لإيجادِ إحداثيَّيْ K.

أَجِدُ y_2	أَجِدُ y_1
$\frac{4 + y_2}{2} = 1$	$\frac{1 + x_2}{2} = 2$
$4 + y_2 = 2$	$1 + x_2 = 4$
$y_2 = -2$	$x_2 = 3$

إذنْ، إحداثيّا النقطةِ K هُما $(3, -2)$.

أتعلَّمُ

يُمكِنُني التحقُّقُ مِنْ معقوليَّةِ الإجابةِ بتمثيلِ النقاطِ الثلاثةِ في المُستوى الإحداثيِّ، وملاحظةِ أنَّ المسافةَ بينَ J وَ M تَظهَرُ مساويةً للمسافةِ بينَ M وَ K.

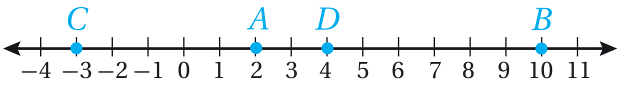


أتحقَّقُ من فهمي

إذا كانتْ $M(-5, 10)$ نقطةَ مُنتصفِ $\overline{EP}$؛ حيثُ $E(-8, 6)$، فَأَجِدُ إحداثيَّي النقطةِ P.

أتدرَّبُ وأحُلُّ المسائلَ

أستعمِلُ خطَّ الأعدادِ المُجاورَ لِأَجِدَ كُلًّا ممّا يأتي:



4 AC

3 CB

2 CD

1 AB

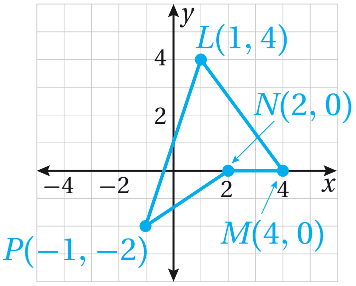
أَجِدُ المسافةَ بينَ كلِّ نقطتَيْنِ ممّا يأتي، مُقرِّبًا إجابتي لأقربِ جُزءٍ مِنْ عشرةٍ (إنْ لَزِمَ):

5 $C(-1, 6), D(4, 8)$

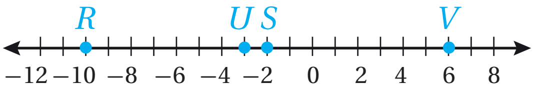
6 $E(6, -1), F(2, 0)$

7 $G(4, -5), H(0, 2)$

8 أَجِدُ محيطَ المُضلَّعِ المُعطى رؤوسُهُ فِي المُستوى الإحداثيِّ المُجاورِ.



أَستعمِلُ خطَّ الأعدادِ المُجاورَ لِأَجِدَ نقطةَ المُنتصفِ لكلٍّ مِنَ القطعِ المستقيمةِ الآتيةِ:

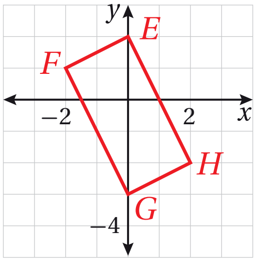


9 $\overline{RS}$

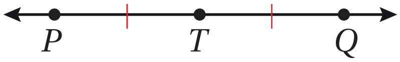
10 $\overline{UV}$

11 $\overline{VS}$

12 أَجِدُ مساحةَ المستطيلِ $FEHG$ المُعطى رؤوسُهُ في المُستوى الإحداثيِّ المُجاورِ.



أَستعمِلُ الشكلَ في أدناهُ لِأَجِدَ PT في كلٍّ ممّا يأتي:



13 $PT = 5x + 3 , TQ = 7x - 9$

14 $PT = 7x - 24 , TQ = 6x - 2$

أَجِدُ إحداثِيَّيْ نقطةِ مُنتصفِ $\overline{HK}$ في كلٍّ مِنَ الحالاتِ الآتيةِ:

15 $H(7, 3), K(-4, -1)$

16 $H(-4, -5), K(2, 9)$

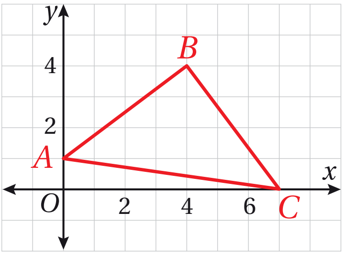
17 $H(-6, 10), K(8, -2)$

أَجِدُ إحداثِيَّيْ نقطةِ نهايةِ القطعةِ المستقيمةِ $\overline{CD}$ المجهولةِ في كلٍّ ممّا يأتي. علمًا أنَّ M نقطةُ مُنتصفِ $\overline{CD}$:

18 $C(-5, 4), M(-2, 5)$

19 $D(1, 7), M(-3, 1)$

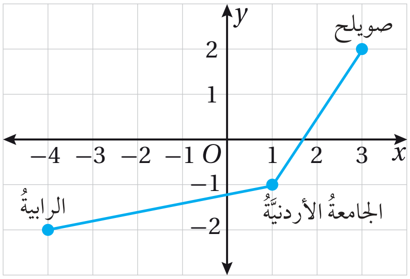
20 $D(-4, 2), M(6, -1)$



أســتعمِلُ الشكلَ المُجاوِرَ، الذي يُبيِّنُ $\triangle ABC$ فِي المُستوى الإحداثِيِّ، للإجابةِ عَنِ السؤالَيْنِ الآتِيَيْنِ تِباعًا:

21 أُحَدِّدُ نوعَ المُثَلَّثِ مِنْ حيثُ الأضلاعُ.

22 أَجِدُ محيطَ المُثَلَّثِ.



23 **مسافةٌ:** تظهَرُ فِي المُســتوى الإحداثِيِّ المُجاورِ 3 مواقعَ فِي العاصمةِ عمّانَ، هِيَ: صويلح، والجامعةُ الأردنيَّةُ، والرابيةُ. إذا كانَتْ كلُّ وحدةٍ فِي المُســتوى الإحداثِيِّ تُمَثِّـلُ كيلومترًا واحدًا، فَأَجِدُ المســافةَ بينَ صويلح والجامعةِ الأردنيَّةِ والمســافةَ بينَ الرابيـةِ والجامعةِ الأردنيَّةِ، مُقَرِّبًا إجابتي لأقربِ جُزْءٍ مِنْ عشرةٍ.

24 أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ.

مهارات التفكير العليا

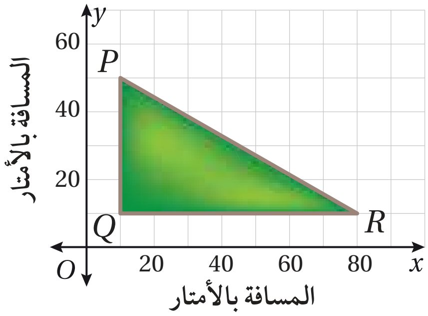
25 **أكتشِـفُ الخطأَ:** وجدَ عمادٌ المسافةَ التقريبيَّةَ بينَ النقطتَيْنِ $A(6, 2)$ وَ $B(1, -4)$، كمـا هُـوَ مُبيَّنٌ جانبًا. أكتشِـفُ الخطأَ في حلِّ عمادٍ، وَأُصَحِّحُهُ.

✗

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(2-1)^2 + [6-(-4)]^2} \\ &= \sqrt{1^2 + 10^2} \\ &= \sqrt{1 + 100} \\ &= \sqrt{101} \approx 10 \end{aligned}$$

26 **تبريرٌ:** تقعُ النقطةُ P علَى القطعةِ المســتقيمةِ التي نهايَتَيْها النقطتانِ $A(1, 4)$ وَ $D(7, 13)$. إذا كانَتِ المسافةُ بينَ P وَ A ضعفَ المسافةِ بينَ P وَ D، فَأَجِدُ إحداثياتِ النقطةِ P.

27 **تبريرٌ:** يُبيِّنُ الشــكلُ المُجاورُ مُخَطَّطًا لحديقةٍ عامَّةٍ على شــكلِ مُثَلَّثٍ مُحاطةٍ بِمَمَرِّ مُشــاةٍ. تمارسُ مرامُ رياضةَ المشــيِ، بحيثُ انطلقَتْ علَى المَمَرِّ بسرعةٍ ثابتةٍ مقدارُها 130 m لكلِّ دقيقةٍ مِنْ P إلى Q ثمَّ مِنْ Q إلى R ثمَّ عادَتْ إلى P. كمْ دقيقةً تقريبًا أستغرقَتْ مرامُ للعودةِ إلى P ثانيةً؟ أُبرِّرُ إجابتي.



الدرس
2

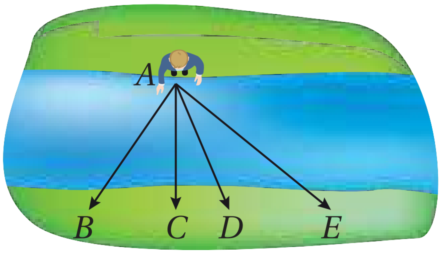
المسافةُ بينَ نقطةٍ ومستقيمٍ
Distance between a Point and a Line

فكرة الدرس

- إيجادُ المسافةِ بينَ نقطةٍ ومستقيم.
- إيجادُ المسافةِ بينَ مُستقيمَيْنِ مُتوازِيَيْنِ.

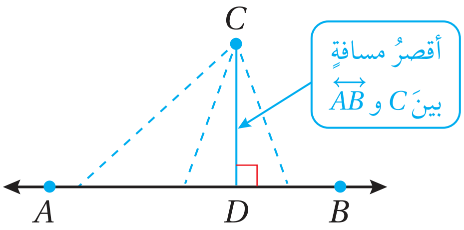
مسألة اليوم

يحاولُ جهادٌ عبورَ جدولِ ماءٍ بالقفزِ مِنْ موقعِهِ عندَ النقطةِ A إلَى الجهةِ الأُخرى مِنَ الجدولِ، كما يظهرُ فِي الشكلِ المُجاورِ. إلى أيِّ نقطةٍ يجبُ أنْ يقفزَ جمالٌ؟ أُبرِّرُ إجابتي.



المسافةُ بينَ نقطةٍ ومستقيمٍ

المسافةُ بينَ مستقيمٍ ونقطةٍ لا تقعُ عليهِ هُوَ طولُ القطعةِ المستقيمةِ العموديَّةِ علَى المستقيمِ مِنْ تلكَ النقطةِ، وَتُمَثِّلُ أقصرَ مسافةٍ بينَ المستقيمِ والنقطةِ. فمثلًا، أقصرُ مسافةٍ بينَ النقطةِ C و $\overleftrightarrow{AB}$ هِيَ $\overline{CD}$.

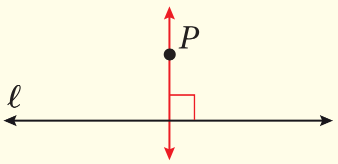


تعلَّمتُ سابقًا كيفَ يُنْشَأُ عمودٌ على قطعةٍ مستقيمةٍ مِنْ نقطةٍ لا تقعُ عليهِ باستعمالِ فرجارٍ ومسطرةٍ، ويتضحُ مِنْ هذهِ الطريقةِ وجودُ مستقيمٍ عموديٍّ واحدٍ علَى الأقلِّ على مستقيمٍ معلومٍ مِنْ نقطةٍ لا تقعُ عليهِ، لكنَّ المُسَلَّمَةَ الآتيةَ تنصُّ على أنَّ هذا المستقيمَ العموديَّ مستقيمٌ وحيدٌ.

مُسَلَّمَةٌ

مُسَلَّمَةُ التعامُدِ

لأيِّ مستقيمٍ ونقطةٍ لا تقعُ عليهِ يوجدُ مستقيمٌ واحدٌ فقط يَمُرُّ بالنقطةِ، ويكونُ عموديًّا علَى المستقيمِ المعلومِ.



أتذكَّرُ

المُسَلَّمَةُ عبارةٌ رياضيَّةٌ تُقبَلُ علَى أنَّها صحيحةٌ مِنْ غيرِ برهانٍ.

مثال 1

أَجِدُ المسافةَ بينَ النقطةِ $(1, 0)$ والمستقيمِ l المارِّ بالنقطتَيْنِ $(3, 0)$ وَ $(1, 2)$.

الخُطوةُ 1: أَجِدُ مُعادلةَ المستقيمِ l.

- أَجِدُ ميلَ المستقيمِ l.

صيغةُ الميلِ $m = \frac{y_1 + y_2}{x_2 - x_1}$

بالتعويضِ $(x_1, y_1) = (3, 0), (x_2, y_2) = (1, 2)$ $= \frac{2 + 0}{1 - 3}$

بالتبسيطِ $= \frac{2}{-2} = -1$

إذنْ، ميلُ المستقيمِ l هُوَ -1

- أَجِدُ مقطعَ المستقيمِ l مِنَ المحورِ y باستعمالِ ميلِهِ ونقطةٍ يَمُرُّ بها:

صيغةُ الميلِ والمقطعِ $y = mx + b$

بتعويضِ $m = -1, x = 3, y = 0$ $0 = -1(3) + b$

بجمعِ 3 لِطَرَفَيِ المُعادلةِ $3 = b$

إذنْ، مُعادلةُ المستقيمِ l هِيَ: $y = x - 1$

الخُطوةُ 2: أَجِدُ مُعادلةَ المستقيمِ w العموديِّ علَى المستقيمِ l والمارِّ بالنقطةِ $(1, 0)$.

ميلُ المستقيمِ l، الذي معادلتُهُ $y = -x + 3$، هُوَ -1؛ لِذا فإنَّ ميلَ المستقيمِ w هُوَ 1.

أَجِدُ مقطعَ المستقيمِ w مِنَ المحورِ y باستعمالِ ميلِهِ والنقطةِ التي يَمُرُّ بها.

صيغةُ الميلِ والمقطعِ $y = mx + b$

بتعويضِ $m = 1, x = 1, y = 0$ $0 = 1(1) + b$

بطرحِ 1 مِنْ طَرَفَيِ المُعادلةِ $-1 = b$

إذنْ، مُعادلةُ المستقيمِ w هِيَ: $y = x - 1$.

أتذكَّرُ

أستعمِلُ ميلَ المستقيمِ والمقطعِ y لكتابةِ مُعادلةِ مستقيمٍ بصيغةِ الميلِ والمقطعِ علَى الصورةِ $y = mx + b$.

أتذكَّرُ

- ميلُ المستقيمِ $y = mx + b$ هُوَ m
- حاصلُ ضربِ ميلَيِ المستقيمَيْنِ المُتعامدَيْنِ يُساوي -1

الخُطوةُ 3: أستعمِلُ مُعادلَتَي المُستقيمَيْنِ l وَ w لكتابةِ نظامِ مُعادلاتٍ وَحَلِّهِ لإيجادِ نقطةِ تقاطعِ المُستقيمَيْنِ.

مُعادلةُ المستقيمِ l	$y = -x + 3$
مُعادلةُ المستقيمِ w	$(+)\quad y = x - 1$
بحذفِ المُتَغيِّرِ y	$2y = 2$
بقسمةِ طرَفَيِ المُعادلةِ على 2	$y = 1$

أُعَوِّضُ 1 بدلًا مِنْ y في إحدى المُعادلَتَيْنِ؛ لإيجادِ قيمةِ x.

مُعادلةُ المستقيمِ w	$y = x - 1$
بتعويضِ 1 بدلًا مِنْ y	$1 = x - 1$
بجمعِ 2 لِطرَفَيِ المُعادلةِ	$x = 2$

إذنْ، يتقاطعُ المستقيمانِ l وَ w فِي النقطةِ $(2, 1)$.

الخُطوةُ 4: أستعمِلُ صيغةَ المسافةِ بينَ نقطتَيْنِ لِأَجِدَ المسافةَ بينَ $(1, 0)$ وَ $(2, 1)$.

صيغةُ المسافةِ فِي المُستوى الديكارتيِّ	$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
بالتعويضِ $(x_1, y_1) = (1, 0)$, $(x_2, y_2) = (2, 1)$	$= \sqrt{(1 - 2)^2 + (0 - 1)^2}$
بالتبسيطِ	$= \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2}$
بإيجادِ مُربَّعِ كلِّ عددٍ، والجمعِ	$= \sqrt{2}$
باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ	≈ 1.4

إذنْ، المسافةُ بينَ النقطةِ $(1, 0)$ والمستقيمِ l هِيَ 1.4 وحدة تقريبًا.

أتحقَّقُ من فهمي

أَجِدُ المسافةَ بينَ النقطةِ $(2, 4)$ والمستقيمِ l الذي مُعادلَتُهُ: $y = x + 2$

أتذكَّرُ

حلُّ نظامِ المُعادلاتِ الخَطِّيَّةِ بِمُتَغيرَيْنِ هُوَ زوجٌ مُرَتَّبٌ يُحقِّقُ كلَّ مُعادلةٍ فِي النظامِ.

أتذكَّرُ

يمكنُ حلُّ نظامِ المُعادلاتِ بالحذفِ أوِ بالتعويضِ.

أتعلَّمُ

أَجِدُ المسافةَ بينَ النقطةِ والمحورِ x بتحديدِ الإحداثيِّ y للنقطةِ، وَأَجِدُ المسافةَ بينَ النقطةِ والمحورِ y بتحديدِ الإحداثيِّ x للنقطةِ.

صيغةُ المسافةِ بينَ نقطةٍ ومستقيمٍ

تعلَّمتُ فِي المثالِ السابقِ إيجادَ المسافةِ بينَ نقطةٍ ومستقيمٍ فِي المُستوى الإحداثيِّ باستعمالِ حلِّ المُعادلاتِ وصيغةِ المسافةِ بينَ نقطتَيْنِ، ويمكنُ أيضًا إيجادُ المسافةِ بينَ نقطةٍ ومستقيمٍ فِي المُستوى الإحداثيِّ بشكلٍ مباشرٍ باستعمالِ الصيغةِ الآتيةِ:

مفهومٌ أساسيٌّ

صيغةُ المسافةِ بينَ نقطةٍ ومستقيمٍ

المسافةُ بينَ المستقيمِ l، الذي معادلَتُهُ: $Ax + By + C = 0$، وَالنقطةِ $P(x_1, y_1)$ تُعطى بالصيغةِ:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

شريطةَ ألّا تكونَ قيمتا A وَ B معًا صِفرًا.

مثال 2

أَجِدُ المسافةَ بينَ النقطةِ $(3, -5)$ والمستقيمِ $3x - 4y = 26$

الخُطوةُ 1: أكتبُ مُعادلةَ المستقيمِ علَى الصورةِ $Ax + By + C = 0$

$3x - 4y = 26$ مُعادلةُ المستقيمِ المُعطاةِ

$3x - 4y - 26 = 0$ بطرحِ 26 مِنْ طَرَفَي المُعادلةِ

إذنْ، $A = 3, B = -4, C = -26$

الخُطوةُ 2: أَجِدُ المسافةَ بينَ النقطةِ والمستقيمِ.

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$ صيغةُ المسافةِ بينَ نقطةٍ ومستقيمٍ

$$= \frac{|3(3)+(-4)(-5)+(-26)|}{\sqrt{(3)^2 + (-4)^2}}$$ بتعويضِ $A = 3, B = -4,$ $C = -26, x_1 = 3, y_1 = -5$

$$= \frac{3}{5}$$ بالتبسيطِ

إذنْ، المسافةُ بينَ النقطةِ والمستقيمِ $\frac{3}{5}$ وحدةً

أتذكَّرُ

أكتبُ مُعادلةَ المستقيمِ علَى الصورةِ $Ax + By + C = 0$ قبلَ التطبيقِ في صيغةِ المسافةِ بينَ نقطةٍ ومستقيمٍ.

أتذكَّرُ

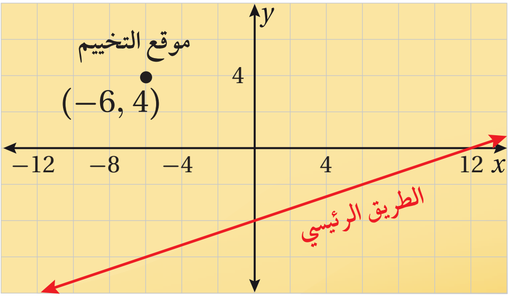
أتَّبعُ أولوياتِ العملياتِ الحسابيَّةِ عَنْ التطبيقِ في قانونِ البُعدِ بينَ نقطةٍ ومستقيمٍ.

أتحقَّق من فهمي

أَجِدُ المسافةَ بينَ النقطةِ $(-1, 3)$ والمستقيمِ $3x - 4y = 16$

نحتاجُ فِي الكثيرِ مِنَ المواقفِ الحياتيَّةِ إلى تحديدِ أقصرِ مسافةٍ لتوفيرِ الوقتِ والجهدِ.

مثال 3 : من الحياة



مُخَيَّمٌ: يظهرُ فِي المُستوى الإحداثِيِّ المُجاوِرِ موقعُ تخييمِ مجموعةٍ كشفيَّةٍ في منطقةِ وادي رمٍّ. إذا أرادَتِ المجموعةُ العودةَ إلى مدينةِ العقبةِ عبرَ الطريقِ الرئيسِ، وكانتْ مُعادلةُ المستقيمِ التي تُمَثِّلُ هذا الطريقَ المُؤدِّيَ إلى مدينةِ العقبةِ هِيَ $y = \frac{1}{3}x - 4$، فَأَجِدُ أقصرَ مسافةٍ بينَ موقعِ التخييمِ والطريقِ، مُقرِّبًا إجابتي لأقربِ جُزءٍ مِنْ عشرةٍ. علمًا أنَّ كلَّ وحدةٍ فِي المُستوى الإحداثِيِّ تُمَثِّلُ كيلومترًا واحدًا.

معلومةٌ

يُسَمّى وادي رمٍّ أيضًا بوادي القمرِ؛ لأنَّ تضاريسَهُ تشبهُ تضاريسَ سطحِ القمرِ، كما أنَّهُ يُعَدُّ منطقةً سياحيَّةً مهمَّةً يرتادُها الزوّارُ والسيّاحُ مِنْ مُختلفِ أنحاءِ العالَمِ للتمتُّعِ بالطبيعةِ الصحراويَّةِ الخلّابةِ.

لإيجادِ أقصرِ مسافةٍ بينَ موقعِ التخييمِ والطريقِ الرئيسِ، أَجِدُ البُعدَ بينَ النقطةِ $(-6, 4)$ والمستقيمِ $y = \frac{1}{3}x - 4$.

الخُطوةُ 1: أكتبُ مُعادلةَ المستقيمِ علَى الصورةِ $Ax + By + C = 0$.

مُعادلةُ المستقيمِ المُعطاةِ	$y = \frac{1}{3}x - 4$
بكتابةِ المُعادلةِ علَى الصورةِ $Ax + By + C = 0$	$\frac{1}{3}x - y - 4 = 0$

إذنْ، $A = \frac{1}{3}, B = -1, C = -4$

الخُطوةُ 2: أَجِدُ المسافةَ بينَ النقطةِ والمستقيمِ.

صيغةُ البُعدَ بينَ نقطةٍ ومستقيمٍ

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

بتعويضِ $A = \frac{1}{3}, B = -1,$ $C = -4, x_1 = -6, y_1 = 4$

$$= \frac{|\frac{1}{3}(-6)+(-1)(4)+(-4)|}{\sqrt{(\frac{1}{3})^2 + (-1)^2}}$$

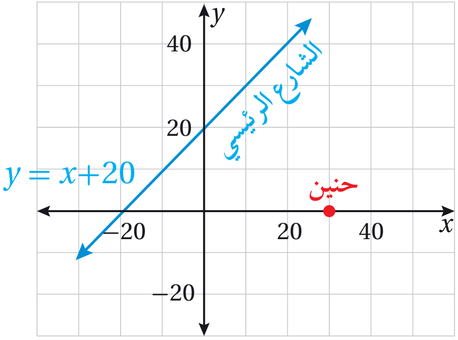
بالتبسيطِ

$$= 9.5$$

إذنْ، المسافةُ بينَ موقعِ التخييمِ والطريقِ الرئيسِ 9.5 km تقريبًا.

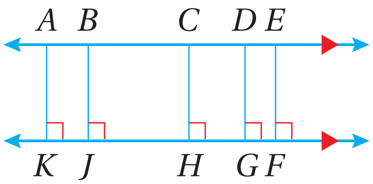
أتحقَّق من فهمي

يظهرُ في المُستوى الإحداثيِّ المُجاورِ موقعُ منزلِ حنينَ بالنسبةِ إلى الشارعِ الرئيسِ المُؤدّي إلى مدرستِها. إذا كانَتْ مُعادلةُ المستقيمِ الذي يُمَثِّلُ الشارعَ الرئيسَ هِيَ $y = x + 20$، فَأَجِدُ أقصرَ مسافةٍ بينَ منزلِ حنينَ والطريقِ، مُقرِّبًا إجابتي لأقربِ جُزءٍ مِنْ عشرَةٍ.



المسافةُ بينَ مستقيمَيْنِ مُتوازِيَيْنِ

تعلَّمتُ سابقًا أنَّ المُستقيمَيْنِ المُتوازِيَيْنِ هُما مُستقيمانِ يقعانِ فِي المُستوى نفسِهِ، بحيثُ تكونُ المسافةُ بينَهُما ثابتةً، وهذا يعني أنَّ المسافةَ بينَ أيِّ نقطةٍ على أحدِهِما والآخَرِ ثابتةٌ.



$AK = BJ = CH = DG = EF$

مفهومٌ أساسيٌّ

المسافةُ بينَ مُستقيمَيْنِ مُتوازِيَيْنِ

المسافةُ بينَ مُستقيمَيْنِ مُتوازِيَيْنِ هِيَ المسافةُ بينَ أحدِ المُستقيمَيْنِ وأيِّ نقطةٍ علَى المستقيمِ الآخَرِ.

يمكنُ استعمالُ المفهومِ في أعلاهُ لإيجادِ المسافةِ بينَ مُستقيمَيْنِ مُتوازِيَيْنِ.

مثال 4

أَجِدُ المسافةَ بينَ المُستقيمَيْنِ المُتوازِيَيْنِ m,n اللَّذَيْنِ مُعادلتُهُما $3x+4y+8=0, 3x+4y+10=0$ علَى الترتيبِ.

الخُطوةُ 1: أَجِدُ إحداثِيَّي نقطةٍ تقعُ على أحدِ المُستقيمَيْنِ.

أُعَوِّضُ $x=0$ في مُعادلةِ المستقيمِ m لِأَجِدَ الإحداثِيَّ y المقابلَ لها.

مُعادلةُ المستقيمِ m	$3x+4y+8=0$
بتعويضِ $x=0$	$3(0)+4y+8=0$
بحلِّ المُعادلةِ	$y=-2$

إذنْ، تقعُ النقطةُ $(0,-2)$ علَى المستقيمِ m

الخُطوةُ 2: أَجِدُ المسافةَ بينَ النقطةِ والمستقيمِ الآخَرِ.

أَجِدُ المسافةَ بينَ النقطةِ $(0,-2)$ والمستقيمِ n؛ حيثُ $A=3, B=4, C=1$.

صيغةُ المسافةِ بينَ نقطةٍ ومستقيمٍ	$d=\frac{\lvert Ax_1+By_1+10\rvert}{\sqrt{A^2+B^2}}$
بتعويضِ $A=3, B=4,$ $C=10, x_1=0, y_1=-2$	$=\frac{\lvert 3(0)+(4)(-2)+10\rvert}{\sqrt{(3)^2+(-4)^2}}$
بالتبسيطِ	$=2$

إذنْ، البُعدُ بينَ المُستقيمَيْنِ m وَ n وحدتانِ.

أتعلَّم

يمكنُ تحديدُ ما إذا كانَ المستقيمانِ مُتوازِيَيْنِ أمْ لا إذا كانَ لَهُما الميلُ نفسُهُ وكانَ المقطعُ y مُختلفًا.

أتحقَّق من فهمي

أَجِدُ المسافةَ بينَ المُستقيمَيْنِ المُتوازِيَيْنِ m, n اللَّذَيْنِ مُعادلتُهُما $x-7y+14=0, x-7y-11=0$ علَى الترتيبِ.

أتدرّب وأحلُّ المسائل

أَجِدُ المسافةَ بينَ النقطةِ P والمستقيمِ l في كلٍّ ممّا يأتي مِنْ غيرِ استعمالِ صيغةِ المسافةِ بينَ نقطةٍ ومستقيمٍ:

1 النقطةُ $P(2, 1)$ والمُستقيمُ l المارُّ بالنقطتَيْنِ $(-6, 0)$ وَ $(1, -4)$.

2 النقطةُ $P(-9, 2)$ والمُستقيمُ l المارُّ بالنقطتَيْنِ $(2, 8)$ وَ $(-2, 3)$.

3 النقطةُ $P(4, 4)$ والمُستقيمُ l المارُّ بالنقطتَيْنِ $(1, -3)$ وَ $(-7, 4)$.

أَجِدُ المسافةَ بينَ النقطةِ P والمُستقيمِ l في كلٍّ ممّا يأتي باستعمالِ صيغةِ المسافةِ بينَ نقطةٍ ومستقيمٍ:

4 النقطةُ $P(5 , 7)$ والمُستقيمُ l المارُّ بالنقطتَيْنِ $(-2, 1)$ وَ $(0, 1)$.

5 النقطةُ $P(1 , -9)$ والمُستقيمُ l المارُّ بالنقطتَيْنِ $(4, 9)$ وَ $(4, -1)$.

6 النقطةُ $P(-3 , -10)$ والمُستقيمُ l المارُّ بالنقطتَيْنِ $(3, 1)$ وَ $(-8, -1)$.

أَجِدُ المسافةَ بينَ النقطةِ والمُستقيمِ في كلٍّ ممّا يأتي:

7 $y - \frac{1}{6}x + 6 = 0, P(-6, 5)$

8 $y - 3x - 3 = 0, Q(1, 0)$

9 $y + \frac{1}{4}x = 1, S(4, 3)$

10 $y = -3, T(5, 2)$

11 $x = 4, K(-2, 5)$

12 $y - x = 0, R(5, 3)$

أَجِدُ المسافةَ بينَ كلِّ مُستقيمَيْنِ مُتوازِيَيْنِ في ما يأتي:

13 $4x - y + 1 = 0$

$4x-y-8=0$

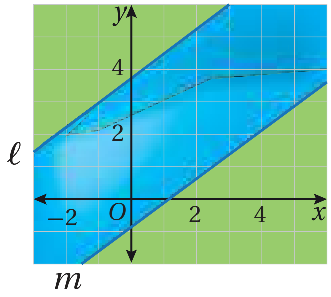
14 $12x + 5y - 3 = 0$

$12x+5y+7=0$

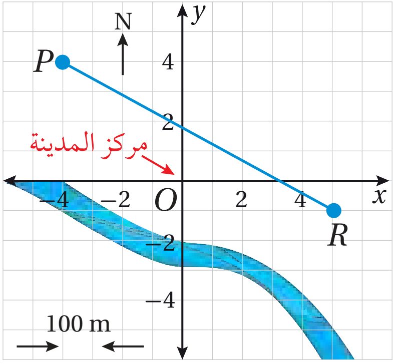
15 $2x - 3y + 4 = 0$

$y = \frac{2}{3}x+5$

16 **نهرٌ:** يظهرُ فِي المُستوى الإحداثيِّ المُجاورِ جُزءٌ مِنْ نهرٍ يُمَثِّلُ المُستقيمانِ l وَ m ضِفَّتَيْهِ. أَجِدُ عرضَ النهرِ، مُقَرِّبًا إجابتي لأقربِ جُزءٍ مِنْ عشرةٍ. علمًا أنَّ كلَّ وحدةٍ فِي المُستوى الإحداثيِّ تُمَثِّلُ 10 أمتارٍ.



يظهرُ فِي المُستوى الإحداثيِّ المُجاورِ منزلُ بسمةَ الذي يقعُ عندَ النقطةِ **P**، ومنزلُ رشا الذي يقعُ عندَ النقطةِ **R**.



17 أَجِدُ طولَ الطريقِ بينَ منزلِ بسمةَ ومنزلِ رشا.

18 أَجِدُ النقطةَ التي تُمَثِّلُ مُنتصفَ الطريقِ بينَ منزلِ بسمةَ ومنزلِ رشا.

19 إذا كانَ مركزُ المدينةِ يقعُ عندَ النقطةِ $(0 , 0)$، فَأَجِدُ أقصرَ مسافةٍ بينَ هذا المركزِ والطريقِ الواصلِ بينَ منزلَيْ بسمةَ ورشا.

مهارات التفكير العليا

20 **أكتشِفُ الخطأَ:** وجدَ عمرانُ المسافةَ بينَ المستقيمِ l الذي مُعادلَتُهُ: $y + 2x - 8 = 0$ والنقطةِ $p(1, -1)$، كما هُوَ مُبيَّنٌ في أدناهُ. أكتشِفُ الخطأَ في حلِّ عمرانَ، وَأُصَحِّحُهُ.

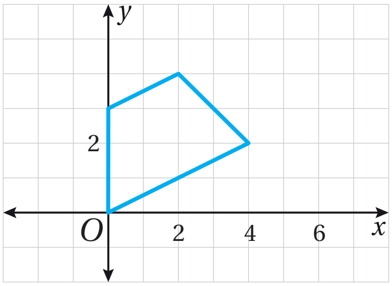
$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + 10|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$= \frac{|1(1)+(2)(-1)+(-8)|}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2}}$$

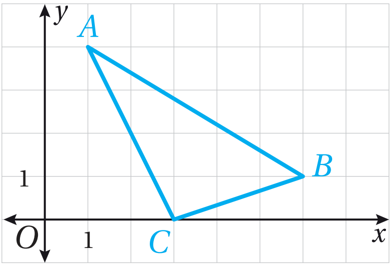
$$= \frac{9}{\sqrt{2}}$$

تبرير: أَجِدُ مساحةَ كلٍّ مِنَ الأشكالِ الآتيةِ، مُبَرِّرًا إجابتي.

22



21



23 **تَحَدٍّ:** أَجِدُ إحداثيَّيِ النقطةِ (النقاطِ) علَى المحورِ x، التي تَبْعُدُ 4 وحداتٍ عَنِ المستقيمِ $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$

الدرس 3

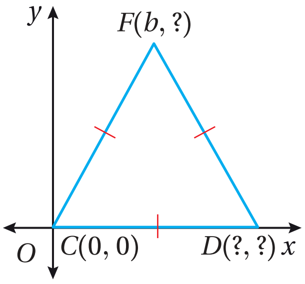
البرهانُ الإحداثِيُّ
Coordinate Proof

فكرة الدرس استعمالُ الهندسةِ الإحداثيَّةِ لِبَرهَنَةِ نظرياتٍ هندسيَّةٍ.

المصطلحات البرهانُ الإحداثيُّ.

مسألة اليوم يُبيِّنُ الشكلُ المُجاورُ المُثلَّثَ المُتطابِقَ الأضلاعِ CFD.

أَجِدُ الإحداثياتِ المجهولةَ للرؤوسِ.

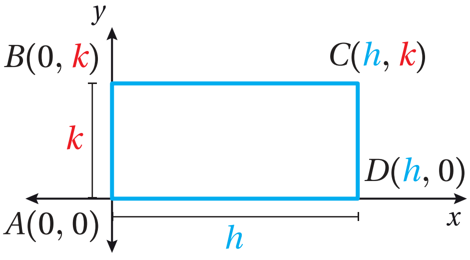


تمثيلُ المُضَلَّعِ في المُستوى الإحداثِيِّ وَتَسمِيَتُهُ

لتمثيلِ مُضَلَّعٍ في المُستوى الإحداثيِّ، يُفَضَّلُ رسمُ أحدِ أضلاعِهِ على محورٍ إحداثيٍّ أوْ أحدِ رؤوسِهِ في نقطةِ الأصلِ؛ وذلكَ لتسهيلِ تحديدِ إحداثياتِ بقيَّةِ رؤوسِهِ اعتمادًا على خصائصِهِ.

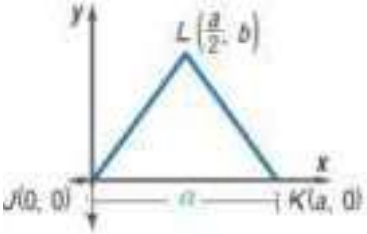
مثال 1

1 أرسُمُ فِي المُستوى الإحداثيِّ المُستطيلَ $ABCD$، الذي طولُهُ h وحدةً وعرضُهُ k وحدةً.



- أجعلُ زاويةَ المُستطيلِ القائمةَ $\angle A$ على نقطةِ الأصلِ؛ لِأَرسُمَهُ فِي الرُّبعِ الأوَّلِ.
- أفترِضُ أنَّ AD يُمَثِّلُ طولَ المُستطيلِ وَيُساوي h وحدةً، وأنَّ AB يُمَثِّلُ عرضَهُ وَيُساوي k وحدةً.
- أرسُمُ D علَى المحورِ x. وبما أنَّ طولَ $AD = h$ فإنَّ الإحداثيَّ y للنقطةِ D هُوَ 0، والإحداثيَّ x هُوَ h.
- أرسُمُ B علَى المحورِ y. وبما أنَّ طولَ $AB = k$ فإنَّ الإحداثيَّ x للنقطةِ B هُوَ 0، والإحداثيَّ y هُوَ k.
- أرسُمُ الرأسَ D، بحيثُ يكونُ إحداثيّاهُ (h, k).

2 أرسُمُ فِي المُستوى الإحداثيِّ المُثلَّثَ المُتَطابِقَ الضِّلْعَيْنِ JLK، الذي فيهِ طولُ $\overline{JK}$ يُساوي a وحدةً.



- أجعلُ زاويةَ المُثلَّثِ القائمةَ $\angle J$ على نقطةِ الأصلِ؛ لِأَرسُمَهُ فِي الرُّبعِ الأوَّلِ.
- بما أنَّ طولَ $\overline{JK}$ يُساوي a وحدةً فإنَّ الإحداثيَّ y للنقطةِ K هُوَ 0، والإحداثيَّ x هُوَ a.
- بما أنَّ المُثلَّثَ مُتَطابِقُ الضِّلعَيْنِ فإنَّ الإحداثيَّ x للرأسِ L يقعُ في مُنتصفِ المسافةِ بينَ 0 وَ a؛ أي أنَّهُ يُساوي $\frac{a}{2}$، وبما أنَّ الإحداثيَّ y لا يمكنُ تحديدُهُ فيمكنُ تسمِيَتُهُ b.

أتذكَّرُ

يكونُ مُنتصفُ زاويةِ الرأسِ فِي المُثلَّثِ مُتَطابِقِ الضِّلعَيْنِ عموديًّا علَى القاعدةِ وَيُنَصِّفُها.

أتحقَّق من فهمي

a) أرسُمُ فِي المُستوى الإحداثيِّ المُرَبَّعَ $ABCD$، الذي طولُ ضِلعِهِ a وحدةً.

b) أرسُمُ فِي المُستوى الإحداثيِّ المُثلَّثَ قائمَ الزاويةِ HMN، الذي فيهِ طولُ $\overline{HM}$ يُساوي a وحدةً، وطولُ $\overline{NM}$ يُساوي b وحدةً.

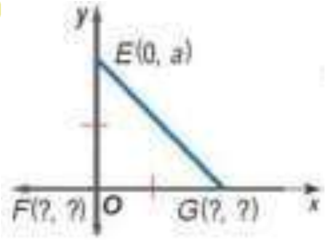
إيجادُ الإحداثياتِ المجهولةِ

يمكنُ تحديدُ إحداثياتٍ مجهولةٍ لرؤوسِ مُضلَّعٍ مُمَثَّلٍ فِي المُستوى الإحداثيِّ، وذلكَ باستعمالِ خصائصِ المُضلَّعِ والإحداثياتِ الأُخرى المعلومةِ.

مثال 2

أَجِدُ الإحداثياتِ المجهولةَ في كلٍّ مِنَ الأشكالِ الآتيةِ:

1

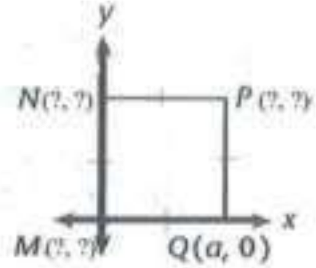


- بما أنَّ الرأسَ F يقعُ عندَ نقطةِ الأصلِ فإنَّ إحداثِيَّيْهِ $(0, 0)$.
- بما أنَّ $\overline{FG} \cong \overline{EF}$ فإنَّ البُعدَ بينَ F وَ G يُساوي a وحدةً، وَهُوَ يُمَثِّلُ الإحداثيَّ x للرأسِ G، وبما أنَّ الرأسَ G علَى المحورِ x فإنَّ إحداثيَّهُ y يُساوي 0. ومنهُ، فإنَّ إحداثيَّيْ G هُما $(a, 0)$.

أُفَكِّرُ

هَلِ المُثلَّثُ فِي الفرعِ 1 مِنَ المثالِ قائمُ الزاويةِ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

2

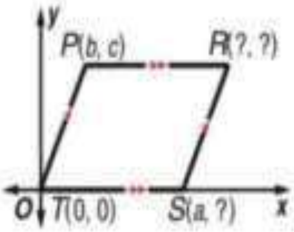


- بما أنَّ الرأسَ M يقعُ عندَ نقطةِ الأصلِ فإنَّ إحداثيَّيْهِ $(0, 0)$.
- بما أنَّ الرأسَ Q يقعُ علَى المحورِ x، ويقعُ الرأسُ N علَى المحورِ y، فإنَّ $\angle EFG$ قائمةٌ، إذنْ أضلاعُ الشكلِ مُتطابِقَةٌ. وعليهِ، فالشكلُ مُرَبَّعٌ.
- بما أنَّ الشكلَ مُرَبَّعٌ فإنَّ البُعدَ بينَ M وَ N يُساوي a وحدةً، وَهُوَ يُمَثِّلُ الإحداثِيَّ y للرأسِ N، وبما أنَّ الرأسَ N يقعُ علَى المحورِ y فإنَّ إحداثِيَّهُ x يُساوي 0. ومنهُ، فإنَّ إحداثِيَّيْ N هُما $(0, a)$.
- بما أنَّ الشكلَ مُرَبَّعٌ فإنَّ بُعدَ الرأسِ P عَنِ المحورِ x وَعَنِ المحورِ y هُوَ a. ومنهُ، فإنَّ إحداثِيَّيْ P هُما (a, a).

أتذكَّرُ

إذا كانَتْ إحدى زوايا مُتوازي الأضلاعِ قائمةً فإنَّ زواياهُ الأربعُ قوائمُ، وعندها يكونُ مُستطيلًا، وبما أنَّ أضلاعَهُ مُتَطابقةٌ وزواياهُ قوائمُ فالشكلُ الهندسيُّ مُرَبَّعٌ.

3



- بما أنَّ كلَّ ضِلعَيْنِ مُتَقابِلَيْنِ مُتَوازِيَيْنِ فالشكلُ مُتوازي أضلاعٍ.
- بما أنَّ الرأسَ S علَى المحورِ x فإنَّ إحداثِيَّهُ y يُساوي 0. ومنهُ، فإنَّ إحداثِيَّيْ S هُما $(a, 0)$.
- بما أنَّ القطعَ المُستقيمةَ الأُفقيَّةَ مُتوازيةٌ دائمًا فإنَّ للنقطتَيْنِ P وَ R الإحداثِيَّ y نفسَهُ، وبما أنَّ المسافةَ مِنْ P إلى R تُساوي a وحدةً والإحداثِيَّ x للنقطةِ P هُوَ b فإنَّ الإحداثِيَّ x للنقطةِ R هُوَ $a + b$. ومنهُ، فإنَّ إحداثِيَّيْ R هُما $(a + b, c)$.

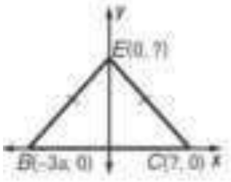
أتذكَّرُ

إذا كانَ الشكلُ مُتوازي أضلاعٍ فإنَّ الأضلاعَ المُتَقابلةَ مُتطابقةٌ.

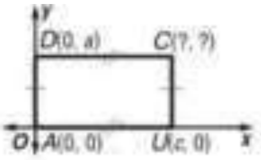
أتحقَّقُ من فهمي

أَجِدُ الإحداثياتِ المجهولةَ في كلٍّ مِنَ الأشكالِ الآتيةِ:

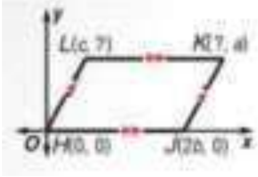
a)



b)



c)



البرهانُ الإحداثيُّ

البرهانُ الإحداثِــيُّ (coordinate proof) هُوَ أحدُ أنواعِ البراهينِ، تُســتعمَلُ فيهِ أشــكالٌ هندسيَّةٌ مرســومةٌ فِي المُســتوى الإحداثِيِّ لإثباتِ صِحَّةِ نظرياتٍ هندســيَّةٍ، ويتضمَّنُ أيضًا استعمالَ مُتغَيِّراتٍ تُمثِّلُ إحداثياتِ رؤوسِ الشــكلِ أوْ قياساتِ زواياهُ أوْ أضلاعِهِ؛ لضمانِ أنَّ النتيجةَ التي يجري برهانُها صحيحةٌ لجميعِ الأشكالِ مِنَ النوعِ نفسِهِ بِغَضِّ النظرِ عَنْ إحداثياتِ رؤوسِهِ.

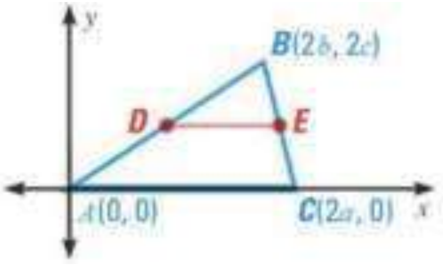
أتذكَّرُ

تعلَّمتُ سابقًا نوعَيْنِ مِنَ البراهينِ، همــا: البرهانُ السَّــهمِيُّ، والبرهانُ ذو العمودَيْنِ.

مثال 3

أكتبُ برهانــًا إحداثيًّا لِأُثْبِتَ أنَّ القطعةَ المُســتقيمةَ الواصلةَ بينَ مُنتَصَفَــيْ ضِلعَيْنِ في مُثَلَّثٍ تُساوي نصفَ طولِ الضِّلعِ الثالثِ وَتُوازيهِ.

الخُطوةُ 1: أرسُــمُ المُثَلَّــثَ فِي المُســتوى الإحداثِيِّ.



أرسُمُ المُثَلَّثَ ABC فِي المُستوى الإحداثِيِّ، وَأُحَدِّدُ إحداثياتِ كلٍّ مِنْ رؤوسِــهِ باستعمالِ مُضاعفاتِ العددِ 2؛ وذلكَ لتسهيلِ الحساباتِ عندَ تطبيقِ صيغةِ نقطةِ المُنتَصَفِ، التي تتضمَّنُ قِسمَةَ مجموعِ الإحداثِيَّيْنِ على 2.

أتعلَّمُ

المُثَلَّــثُ ABC، الــذي رُسِــمَ، غيــرُ مُحَــدَّدِ القياســاتِ؛ لأنَّ اختيــارَ الإحداثيــاتِ اعتمدَ على قيمتَيْــنِ مُتغَيِّرَتَيْنِ هُما a وَ b؛ لِذا يمكنُ اســتعمالُ هــذا المُثَلَّــثِ لإثبــاتِ صِحَّةِ علاقاتٍ في جميعِ المُثَلَّثاتِ.

الخُطوةُ 2: أُحَدِّدُ المُعطياتِ والمطلوبَ.

المُعطياتُ: في ΔABC

- D نقطةُ مُنتَصَفِ $\overline{AB}$.
- E نقطةُ مُنتَصَفِ $\overline{BC}$.

المطلوبُ: إثباتُ أنَّ $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$، وأنَّ $DE = \frac{1}{2}AC$

الخُطوةُ 3: البرهانُ

1) أُثبِتُ أنَّ $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$

باستعمالِ صيغةِ نقطةِ المُنتَصَفِ، فإنَّ إحداثِيَّيْ كلٍّ مِنْ D وَ E هُما:

$$D\left(\frac{2b+0}{2}, \frac{2c+0}{2}\right) = D(b, c) \qquad E\left(\frac{2b+2a}{2}, \frac{2c}{2}\right) = E(b+a, c)$$

بما أنَّ الإحداثيَّ y لكلٍّ مِنْ D وَ E مُتَساويانِ فإنَّ ميلَ $\overline{DE}$ يُساوي صِفرًا، وبما أنَّ $\overline{AC}$ مُنطَبِقٌ علَى المحورِ x فإنَّ ميلَهُ أيضًا يُساوي صِفرًا. إذنْ، $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$ لأنَّ لَهُما الميلَ نفسَهُ.

2) أُثبِتُ أنَّ $DE = \frac{1}{2} AC$

أستعمِلُ صيغةَ المسافةِ على خطِّ الأعدادِ لِأَجِدَ DE.

صيغةُ المسافةِ على خطِّ الأعدادِ	$DE = \lvert x_2 - x_1 \rvert$
بالتعويضِ $x_1 = b, x_2 = b + a$	$= \lvert b + a - b \rvert$
بالتبسيطِ	$= \lvert a \rvert$
بإيجادِ القيمةِ المُطلقةِ	$= a$

أستعمِلُ صيغةَ المسافةِ على خطِّ الأعدادِ لِأَجِدَ AC.

صيغةُ المسافةِ على خطِّ الأعدادِ	$AC = \lvert x_2 - x_1 \rvert$
بالتعويضِ $x_1 = 0, x_2 = 2a$	$= \lvert 2a - 0 \rvert$
بالتبسيطِ	$= \lvert 2a \rvert$
بإيجادِ القيمةِ المُطلقةِ	$= 2a$

بما أنَّ $DE = a$ وَ $AC = 2a$ فإنَّ $DE = \frac{1}{2} AC$

أتحقَّق من فهمي

أكتبُ برهانًا إحداثيًّا لِأُثبِتَ أنَّ القطعةَ المُستقيمةَ الواصلةَ بينَ رأسِ المُثلَّثِ قائمِ الزاويةِ ومُنتَصَفِ الوَتَرِ تُساوي نصفَ طولِ الوَتَرِ.

أتذكَّرُ

للمُستقيماتِ المتوازيةِ الميلُ نفسُهُ، والمستقيماتُ الأُفقيَّةُ جميعُها مُتوازيةٌ وميلُها يُساوي 0

أتعلَّمُ

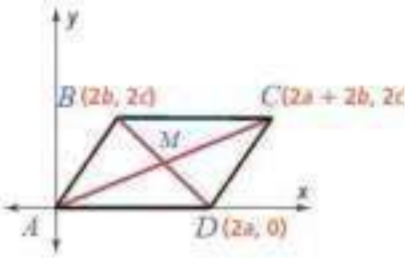
مِنَ الأسهلِ إيجادُ طولِ القطعةِ المُستقيمةِ الأُفقيَّةِ في المُستوى الإحداثيِّ باستعمالِ صيغةِ المسافةِ على خطِّ الأعدادِ، وذلكَ بإيجادِ القيمةِ المُطلقةِ للفرقِ بينَ الإحداثيِّ x لكلٍّ مِنْ نُقطَتَيْ نهايَتَي القطعةِ، وَلإيجادِ طولِ القطعةِ المستقيمةِ العموديَّةِ أَجِدُ القيمةَ المُطلقةَ للفرقِ بينَ الإحداثيِّ y لكلٍّ مِنْ نقطَتَيْ نهايَتَي القطعةِ.

مثال 4

أكتبُ برهانًا إحداثيًّا لِأُثبِتَ أنَّهُ إذا كانَ الشكلُ الرُّباعِيُّ مُتوازيَ أضلاعٍ فإنَّ قُطرَيْهِ يُنَصِّفُ كلٌّ منهُما الآخَرَ.

الخُطوةُ 1: أرسُمُ مُتوازيَ الأضلاعِ فِي المُستوى الإحداثيِّ.

أرسُمُ $\square ABCD$ فِي المُستوى الإحداثيِّ، وَأُحدِّدُ إحداثياتِ كلٍّ مِنْ رؤوسِهِ، كما فِي الشكلِ المُجاورِ.



أتذكَّرُ

بما أنَّ صيغةَ نقطةِ المُنتَصَفِ تتضمَّنُ قِسمَةَ مجموعِ الإحداثيَّيْنِ على 2، فَمِنَ الأسهلِ استعمالُ إحداثياتٍ مِنْ مُضاعفاتِ العددِ 2.

الخُطوةُ 2: أُحَدِّدُ المُعطياتِ والمطلوبَ.

المُعطياتُ:

- إحداثياتُ رؤوسِ ▱$ABCD$.
- نقطةُ تقاطعِ $\overline{AC}$ وَ $\overline{BD}$ هِيَ M.

المطلوبُ: إثباتُ أنَّ M نقطةُ مُنتَصَفِ $\overline{AC}$، ونقطةُ مُنتَصَفِ $\overline{BD}$ أيضًا.

الخُطوةُ 3: البرهانُ

- أَجِدُ مُنتَصَفَ $\overline{AC}$ باستعمالِ صيغةِ نقطةِ المُنتَصَفِ.

$$D\left(\frac{2a+2b+0}{2}, \frac{2c+0}{2}\right) = (a+b, c)$$

- أَجِدُ مُنتَصَفَ $\overline{BD}$ باستعمالِ صيغةِ نقطةِ المُنتَصَفِ.

$$D\left(\frac{2a+2b}{2}, \frac{2c+0}{2}\right) = (a+b, c)$$

- بما أنَّ لكلٍّ مِنْ $\overline{AC}$ وَ $\overline{BD}$ نقطةَ المُنتَصَفِ نفسَها، ونقطةَ تقاطعِ $\overline{AC}$ وَ $\overline{BD}$ هِيَ M، فإنَّ M نقطةُ مُنتَصَفِ $\overline{AC}$ ونقطةُ مُنتَصَفِ $\overline{BD}$.

أتحقَّق من فهمي

أكتبُ برهانًا إحداثيًّا لِأُثبِتَ أنَّهُ إذا كانَ فِي الشكلِ الرُّباعِيِّ ضِلعانِ مُتوازيانِ وَمُتطابِقانِ فإنَّ الشكلَ الرُّباعِيَّ مُتوازي أضلاعٍ.

تصنيفُ الأشكالِ الرُّباعيّةِ باستعمالِ الهندسةِ الإحداثيّةِ

تعلَّمتُ سابقًا أنَّ كُلًّا مِنَ المُستطيلِ والمعينِ والمُرَبَّعِ هُوَ حالةٌ خاصَّةٌ مِنْ مُتوازي الأضلاعِ، ولكلِّ شكلٍ منها خَواصُّ تُمَيِّزُهُ.

مراجعةُ المفهومِ

حالاتٌ خاصَّةٌ مِنْ مُتوازي الأضلاعِ

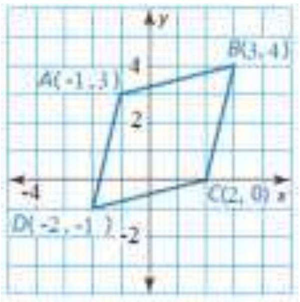
- المُستطيلُ مُتوازي أضلاعٍ زواياهُ الأربعُ قوائمُ وَقُطراهُ مُتطابقانِ.
- المعينُ مُتوازي أضلاعٍ أضلاعُهُ مُتطابقةٌ وَقُطراهُ مُتعامدانِ.
- المُرَبَّعُ مُتوازي أضلاعٍ أضلاعُهُ مُتطابقةٌ وزواياهُ مُتطابقةٌ وأقطارُهُ مُتعامِدَةٌ.

أتذكَّرُ

جميعُ خصائصِ مُتوازي الأضلاعِ والمُستطيلِ والمعينِ تنطبِقُ علَى المُرَبَّعِ.

مثال 5

أُحَدِّدُ ما إذا كانَ ▱$ABCD$، الذي إحداثياتُ رؤوسِهِ $D(-2, -1)$، $C(2, 0)$، $B(3, 4)$، $A(-1, 3)$، مستطيلًا أَوْ معينًا أَوْ مُرَبَّعًا.



الخُطوةُ 1: أرسُمُ مُتوازي الأَضلاعِ فِي المُستوى الإِحداثِيِّ.

أرسُمُ ▱$ABCD$ فِي المُستوى الإحداثِيِّ، كما فِي الشكلِ المُجاوِرِ.

الخُطوةُ 2: أُحَدِّدُ المُعطياتِ والمطلوبَ.

المُعطياتُ: إحداثياتُ رؤوسِ ▱$ABCD$.

المطلوبُ: إثباتُ أنَّ ▱$ABCD$ معينٌ أَوْ مُستطيلٌ أَوْ مُرَبَّعٌ.

أتعلَّمُ

يظهرُ مِنَ التمثيلِ البيانِيِّ لِـ ▱$ABCD$ أنَّ زواياهُ ليسَتْ قوائمَ؛ لِذا فإنَّ التخمينَ الأَوَّلِيَّ أنَّ الشكلَ معينٌ وليسَ مُرَبَّعًا أَوْ مُستطيلًا، ويبقى التحقُّقُ مِنْ صِحَّةِ التخمينِ جبريًّا.

الخُطوةُ 3: البرهانُ

إذا كانَ قُطرا مُتوازي الأَضلاعِ مُتطابِقَيْنِ فإنَّهُ مُستطيلٌ، وإذا كانا مُتعامِدَيْنِ فإنَّهُ معينٌ، وإذا كانا مُتطابِقَيْنِ وَمُتعامِدَيْنِ فإنَّهُ مُرَبَّعٌ.

- أستعمِلُ صيغةَ المسافةِ بينَ نقطتَيْنِ للمقارنةِ بينَ طولَيِ القُطرَيْنِ AC وَ BD.

$$AC = \sqrt{(2-(-1))^2 + (0-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$BD = \sqrt{(-2)-3)^2 + ((-1)-4)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

بما أنَّ $3\sqrt{2} \neq 5\sqrt{2}$ فإنَّ القُطرَيْنِ ليسا مُتطابِقَيْنِ؛ لِذا ▱$ABCD$ ليسَ مُستطيلًا ولا مُرَبَّعًا.

- أستعمِلُ صيغةَ الميلِ لِتحديدِ ما إذا كانَ القُطرانِ مُتعامِدَيْنِ.

ميلُ $\overline{AC}$	ميلُ $\overline{BD}$
$m = \frac{0-3}{2-(-1)} = \frac{-3}{3} = -1$	$m = \frac{(-1)-4}{(-2)-3} = \frac{-5}{-5} = 1$

بما أنَّ حاصلَ ضربِ المَيْلَيْنِ يُساوي -1 فإنَّ القُطرَيْنِ مُتعامِدَيْنِ؛ لِذا فإنَّ ▱$ABCD$ معينٌ.

أتحقَّقُ من فهمي

أُحَدِّدُ ما إذا كانَ ▱$ABCD$، الذي إحداثياتُ رؤوسِهِ $D(-3, -1)$، $C(-2, -3)$، $B(4, 0)$، $A(3, 2)$، مُستطيلًا أَوْ معينًا أَوْ مُرَبَّعًا.

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أرسُمُ كُلًّا مِنَ المُضَلَّعاتِ الآتيةِ في المُستوى الإحداثيِّ، مُحَدِّدًا إحداثياتِ رؤوسِ كلٍّ منها:

1 المُثَلَّثُ قائمُ الزاويةِ RMN، الذي طولُ $\overline{MN}$ فيهِ يُساوي 3 وحداتٍ، وطولُ $\overline{MR}$ يُساوي 4 وحداتٍ.

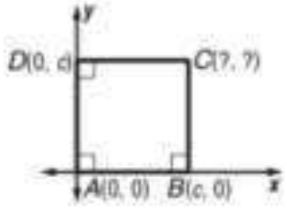
2 المُرَبَّعُ $ABCD$، الذي طولُ ضِلعِهِ $3a$.

3 المُثَلَّثُ قائمُ الزاويةِ مُتطابِقُ الضِّلعَيْنِ JGF، الذي طولُ كلٍّ مِنْ ساقَيْهِ p وحدةً.

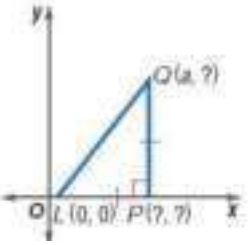
4 المُثَلَّثُ مُختلفُ الأضلاعِ QWR، الذي طولُ أحدِ أضلاعِهِ m.

أَجِدُ الإحداثياتِ المجهولةَ في كلٍّ مِنَ الأشكالِ الآتيةِ:

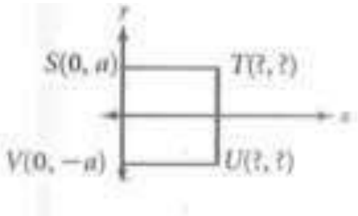
5 مُرَبَّعٌ



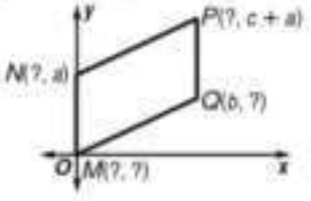
6 مُثَلَّثٌ



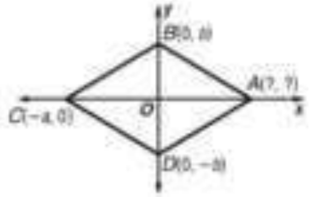
7 مُرَبَّعٌ



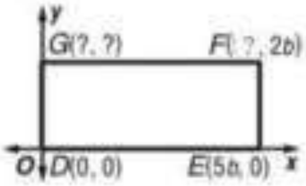
8 مُتوازي أضلاعٍ



9 معينٌ



10 مُستطيلٌ

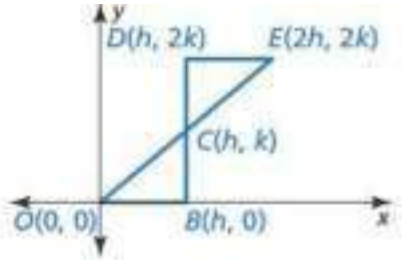


أكتبُ برهانًا إحداثيًّا لِأُثبِتَ كُلًّا ممّا يأتي:

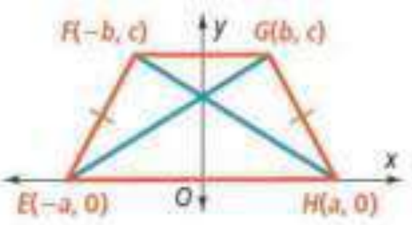
11 إذا كانَ الشكلُ الرُّباعِيُّ مُتوازي أضلاعٍ فإنَّ أضلاعَهُ المُتقابِلَةَ مُتطابقةٌ.

12 إذا كانَ كلُّ ضِلعَيْنِ مُتقابِلَيْنِ في الشكلِ الرُّباعيِّ مُتطابِقَيْنِ فإنَّهُ مُتوازي أضلاعٍ.

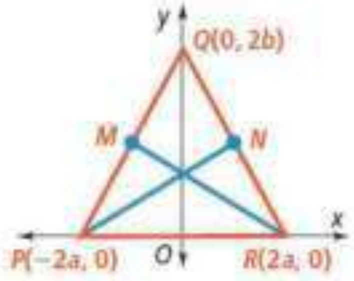
13 العمودُ النازلُ مِنْ رأسِ المُثَلَّثِ مُتطابِقِ الضِّلعَيْنِ إلى القاعدةِ يُنَصِّفُ القاعدةَ.



14 أسـتعمِلُ المعلوماتِ المُعطـاةَ علَى الشـكلِ المُجـاورِ لِأُثبِتَ باستعمالِ البرهانِ الإحداثيِّ أنَّ $\triangle DEC \cong \triangle BOC$.



15 أسـتعمِلُ المعلوماتِ المُعطـاةَ علَى الشـكلِ المُجـاورِ لِأُثبِتَ باستعمالِ البرهانِ الإحداثيِّ أنَّ $\overline{EG} \cong \overline{FH}$.



16 فِـي الشـكلِ المُجـاورِ، إذا كانَ $\overline{PQ} \cong \overline{RQ}$، وكانَـتْ M نقطة مُنتَصَـفِ $\overline{PQ}$ وَ N نقطة مُنتصَفِ $\overline{RQ}$، فَأُثبِتُ باسـتعمالِ البرهانِ الإحداثيِّ أنَّ $\overline{PN} \cong \overline{RM}$.

أُحَدِّدُ ما إذا كانَ ▱$JKLM$، المُعطاةُ إحداثياتُ رؤوسِهِ في كلٍّ ممّا يأتي، معينًا أوْ مُستطيلًا أوْ مُرَبَّعًا:

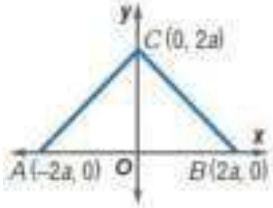
18 $J(-2, 7), K(7, 2), L(-2, -3), M(-11, 2)$

17 $J(-4, 2), K(0, 3), L(1, -1), M(-3, -2)$

20 $J(-1, 4), K(-3, 2), L(2, -3), M(4, -1)$

19 $J(3, 1), K(3, -3), L(-2, -3), M(-2, 1)$

مهارات التفكير العليا



21 **تبريرٌ:** أُصَنِّفُ $\triangle ABC$، المرسـومَ فِي المُسـتوى الإحداثِـيِّ المُجاورِ، بحسبِ أضلاعِهِ وزواياهُ، مُبَرِّرًا إجابتي.

22 **أكتشِـفُ الخطأَ:** تقولُ شـذى إنَّ الشـكلَ الرُّباعِيَّ $PQRS$، الـذي إحداثياتُ رؤوسِـهِ $S(-2, 1)$، $R(1, -5)$، $Q(3, -4)$، $P(0, 2)$، متوازي أضلاعٍ وليسَ مُسـتطيلًا، وتقولُ ضُحى إنَّهُ مُستطيلٌ. أيُّ الإجابَتَيْنِ صحيحةٌ؟ أُبَرِّرُ إجابتي.

23 **تَحَدٍّ:** مُتوازي أضلاعٍ أحدُ رُؤوسِـهِ النقطةُ (2, 4) والرأسُ الآخَرُ النقطـةُ (3, 1) ونقطةُ تقاطعِ قُطرَيْهِ (0, 1). أَجِدُ بَقِيَّةَ رُؤوسِهِ.

أختارُ رمزَ الإجابةِ الصحيحةِ لكلٍّ ممّا يأتي:

1 المسافةُ بينَ النقطتيْنِ $A(-1, 4)$ وَ $B(-3, -2)$، هِيَ:

a) $\sqrt{26}$ b) $\sqrt{40}$

c) $\sqrt{20}$ d) $\sqrt{34}$

2 إحداثيّا نقطةِ مُنتصِفِ $\overline{CD}$؛ حيثُ $C(1, -2)$ وَ $D(-3, 6)$، هُما:

a) $(-1, 2)$ b) $(-2, 4)$

c) $(1.5, -0.5)$ d) $(-4.5, 1.5)$

3 إذا كانَتْ $M(-2, -6)$ نقطةَ مُنتصَفِ $\overline{AB}$؛ حيثُ $B(7, 4)$، فإنَّ إحداثيَّي النقطةِ A هُما:

a) $(-11, 16)$ b) $(11, -16)$

c) $(11, 16)$ d) $(-11, -16)$

4 نقطةُ تقاطعِ قُطرَيْ مُربَّعٍ طولُ ضِلعِهِ s ورأساهُ $(0, 0)$ وَ (s, s)، هي:

a) (s, s) b) $(2s, 2s)$

c) $(\frac{s}{2}, \frac{s}{2})$ d) $(\frac{s}{2}, 0)$

5 إذا كانَتْ $(0, 0)$، $(5, 3)$، $(3, 5)$ تُمَثِّلُ رُؤوسَ مُتوازي أضلاعٍ، فإنَّ النقطةَ التي تُمَثِّلُ الرأسَ الرابعَ لِمُتوازي الأضلاعِ هِيَ:

a) $(5, 0)$ b) $(3, 0)$

c) $(2, -2)$ d) $(2, 2)$

أَجِدُ المسافةَ بينَ كلِّ نقطتَيْنِ ممّا يأتي، مُقرِّبًا إجابتي لِأقربِ جُزْءٍ مِنْ عشرةٍ (إنْ لَزِمَ):

7 $N(-3, 2), M(9, 7)$ 6 $A(2, 2), B(6, 5)$

9 $F(-6, -4), J(9, 4)$ 8 $P(1, 5), T(7, -3)$

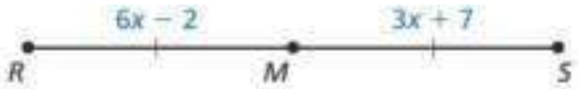
أَجِدُ إحداثيَّيْ نقطةِ مُنتصَفِ $\overline{AB}$ في كلٍّ مِنَ الحالاتِ الآتيةِ:

10 $A(8, 4), B(12, 2)$

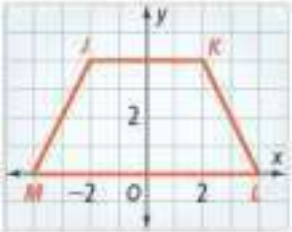
11 $A(9, 5), B(8, -6)$

12 $A(-11, -4), B(-9, -2)$

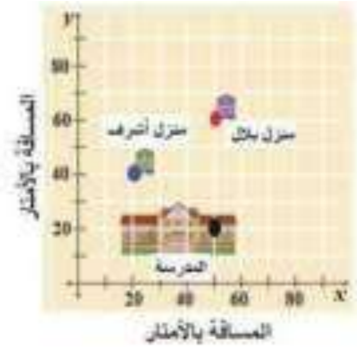
13 فِي الشكلِ الآتي، إذا كانَتْ M نقطةَ مُنتَصَفِ $\overline{RS}$، فَأَجِدُ طولَ $\overline{MR}$.



14 أَجِدُ محيطَ شبهِ المُنحرِفِ $JKLM$، المرسومِ فِي المُستوى الإحداثيِّ المُجاوِرِ.



15 انطلقَ بلالٌ مِنْ منزلِهِ إلَى المدرسةِ مرورًا بمنزلِ أشرفَ. أَجِدُ المسافةَ التي قطعَها بلالٌ مِنْ منزلِهِ إلَى المدرسةِ، مُستعينًا بالمُستوى الإحداثيِّ في أدناهُ.



اختبار نهاية الوحدة

أَجِدُ المسافةَ بينَ النقطةِ والمستقيمِ في كلٍّ ممّا يأتي:

16 $y = -x + 2, P(8, 4)$

17 $x - 3y + 9 = 0, Q\,(-13, 6)$

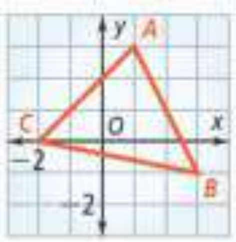
18 $y - 4x = 7, B(-13, 6)$

19 $y - 1 = 5x, S(3, 3)$

20 $y + 2x + 15 = 0, M(-1, -4)$

21 $2x + y + 5 = 0, N(0, 0)$

22 أَجِدُ مساحةَ المُثَلَّثِ المُعطاةُ رُؤوسُهُ فِي المُستوى الإحداثِيِّ المُجاوِرِ:



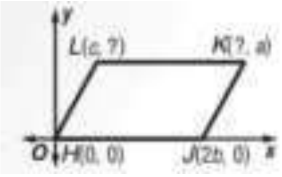
أَجِدُ البُعدَ بينَ كلِّ مُستقيمَيْنِ مُتوازِيَيْنِ في ما يأتي:

23 $x + 2y - 3 = 0$
$x + 2y + 4 = 0$

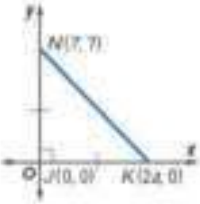
24 $9x + 12\,y + 10 = 0$
$9x + 12\,y - 20 = 0$

أَجِدُ الإحداثياتِ المجهولةَ في كلٍّ مِنَ الأشكالِ الآتيةِ:

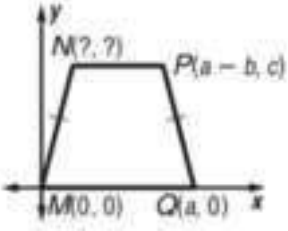
25 مُتوازي أضلاعٍ



26 مُثَلَّثٌ



27 شبهُ مُنحَرِفٍ

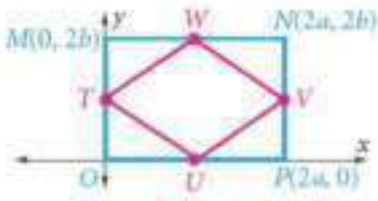


أُحَدِّدُ ما إذا كانَ ▱$JKLM$، المُعطاةُ إحداثياتُ رُؤوسِهِ في كلٍّ ممّا يأتي، معينًا أوْ مُستطيلًا أوْ مُرَبَّعًا:

28 $J(5, 2), K(1, 9), L(-3, 2), M(1, -5)$

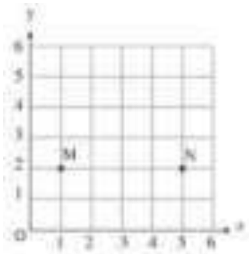
29 $J(5, 2), K(2, 5), L(-1, 2), M(2, -1)$

30 فِي الشكلِ الآتي، إذا كانَ $MNPO$ مُستطيلًا، وكانَتْ T, W, V, U نقاطَ مُنتَصَفِ أضلاعِهِ، فَأُثبِتُ باستعمالِ البرهانِ الإحداثِيِّ أنَّ $TWVU$ معينٌ.



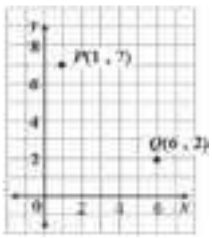
تدريب على الاختبارات الدولية

31 يُبيِّنُ الشكلُ المُجاوِرُ النقطتَيْنِ M وَ N. أيُّ الآتيةِ يمكنُ أنْ تكونَ إحداثِيَّي النقطةِ P، بحيثُ يكونُ المُثَلَّثُ MPN مُتطابِقَ الضِّلعَيْنِ؟



a) (3, 5) **b)** (3, 2) **c)** (1, 5) **d)** (5, 1)

32 أيُّ النقاطِ الآتيةِ تقعُ فِي مُنتَصَفِ المسافةِ بينَ النقطتَيْنِ P وَ Q، المُمَثَّلَتَيْنِ فِي المُستوى الإحداثِيِّ المُجاوِرِ؟



a) (7, 8) **b)** (4, 4)

c) (3, 5) **d)** (2, 2)